VIII. Exemples de lois de probabilité continues

1. De l'histogramme à la densité de probabilité

On souhaite étudier la durée de vie d'un type d'ampoule électrique basse consommation de marque donnée. On a relever pour 2000 ampoules de ce type, leur durée de vie (en heures) et certains résultats ont été recopiés dans le tableau ci-contre.

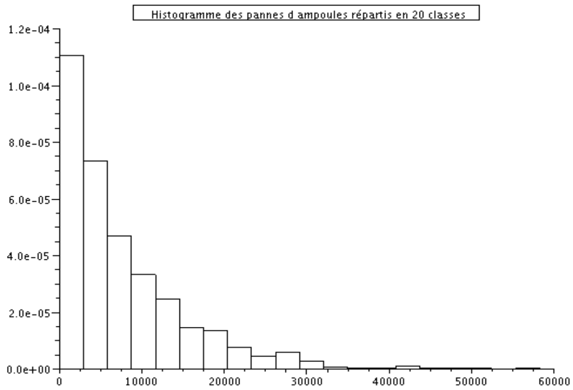
6354.	10677.	638.	1433.	992.
12923.	7940.	22404.	6134.	9397.
3466.	345.	20843.	1493.	6077.
7623.	8512.	17447.	4526.	1712.
6613.	2083.	2098.	61.	9066.
2232.	744.	1364.	25578.	8063.
5225.	8341.	3165.	2000.	9909.
2162.	990.	1930.	510.	7503.
7558.	11080.	2992.	1120.	4408.
2260.	10211.	8127.	7918.	31358.
1754.	11630.	1400.	6549.	3748.
3187.	245.	7853.	1920.	659.
7978.	13589.	36.	1611.	9392.
10775.	7858.	1044.	3126.	6966.
9503.	10347.	16908.	11000.	4007.
10029.	6394.	3893.	3522.	931.
3533.	11688.	9682.	36591.	3289.
8840.	35628.	6381.	8645.	3825.
29255.	22647.	10170.	6970.	17864.
8282.	13579.	3401.	271.	2104.
2796.	411.	5098.	2250.	...

On peut par exemple s'intéresser à la probabilité qu'une ampoule ait une vie inférieure à 6000 heures (soit quatre ans environ à raison de 4h/jour).

De notre expérience aléatoire (attendre qu'une ampoule lâche) nous connaissons a priori l'univers ω : l'ensemble des ampoules du type choisi. Si *X* est la variable aléatoire donnant la durée de vie d'une ampoule, les valeurs x_1 , x_2 , x_3 ... x_n prise par *X* sont en nombre infinis : c'est l'intervalle [0; $+\infty$ [. De ce fait, la probabilité $p(X=x_i)$ pour un x_i de [0; $+\infty$ [donné vaut certainement 0.

On s'intéresse donc aux probabilités que *X* soit dans un intervalle donné $[a\,;b[$: $p(a\leq x<b)$. Dans notre cas : $p(0\leq X<6000)$. Mais comment la calculer ?

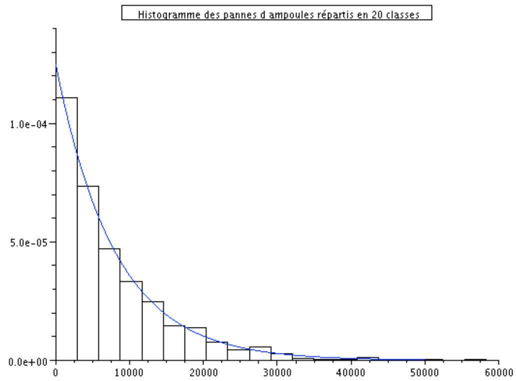
Avec le sondage effectué plus haut, on peut ranger les différentes valeurs obtenues dans des classes de même amplitude et tracer l'**histogramme des fréquences** comme celui représenté ci-contre. Cet histogramme dessine une fonction en escalier.



L'aire sous la courbe entre deux valeurs *a* et *b* représente la fréquence de la classe $[a\,,b]$. Dans notre exemple, la fréquence d'ampoules ayant une durée de vie inférieure à 6000 heures et d'environ

____

En **affinant** les classes, la fonction en escaliers semblent se rapprocher d'une fonction **continue**.



L'aire sous cette courbe sur l'intervalle $[a\,;b]$ est alors un bon modèle pour la probabilité $p(a\leq X<b)$. Nous savons que nous pouvons exprimer cette aire à l'aide d'une intégrale. Si on appelle *f* cette fonction supposée continue, on a alors $P(a\leq X<b)=\int_a^b f(t)\,dt$

Cette fonction *f* q**ui est positive** s'appelle la **densité de probabilité de la variable X**.

Elle doit vérifier en outre, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=1$.

Dans notre exemple, on a choisi $f(t)=\frac{1}{8000}e^{-\frac{1}{8000}t}$. On peut alors vérifier que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=1$ et $\int_0^{6000} f(t)\,dt\approx 0{,}528$. Il y a ainsi plus d'une chance sur deux pour que la durée de vie de ce type d'ampoule soit inférieure à 6000 heures.

Définitions : On considère une variable aléatoire X qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On appelle *fonction de densité de la variable aléatoire X*, une fonction définie sur I, positive et telle que

$$\int_I f(t)\,dt=1$$

- On appelle *loi de probabilité de la variable aléatoire X de densité f* la connaissance, pour tout intervalle $]a\,;b[$ **de I, du nombre** $P(X\in]a\,;b[)=\int_a^b f(t)\,dt$ **(avec éventuellement a ou b infinis).**