

Rallye Mathématique

Poitou - Charentes

Épreuve du 14 mars 2017

Éléments de solutions



1) Nombres, formes et jeux (60 points)

Triplets pythagoriciens (10 points)

A) Remontons le temps !

- 1) Une corde à 13 nœuds, avec ses 12 segments ($5 + 4 + 3$), sert à vérifier ou à construire un angle droit ($5^2 = 4^2 + 3^2$).
- 2) $(7, 24, 25)$ est un triplet pythagoricien car $25^2 = 24^2 + 7^2$

B) Tableau de triplets pythagoriciens

Voici le début du tableau tel qu'il était demandé.

Δ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	a	b	$a^2 - b^2$	$2 \times a \times b$	$a^2 + b^2$	$(a^2 - b^2)^2$	$(2 \times a \times b)^2$	$(a^2 + b^2)^2$		$(a^2 - b^2)^2 + (2 \times a \times b)^2$
2	2	1	3	4	5	9	16	25		25
3	3	1	8	6	10	64	36	100		100
4	7	3	40	42	58	1600	1764	3364		3364
5	7	5	24	70	74	576	4900	5476		5476
6	10	8	36	160	164	1296	25600	26896		26896
7	3	2	5	12	13	25	144	169		169

- 1) Dans la colonne J, on peut écrire, au choix, les formules suivantes : $F + G$ et on obtient H, mais aussi $H - G$ pour avoir F ou $H - F - G$ pour avoir O.
- 2) $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$
- 3) Un triplet pythagoricien contenant deux nombres consécutifs supérieurs à 30 : $(9, 40, 41)$; $(11, 60, 61)$; $(13, 84, 85)$; $(14, 144, 145)$; $(15, 112, 113)$; $(19, 180, 181)$
Les trois nombres sont supérieurs à 70 : $(75, 100, 125)$; $(80, 84, 116)$.

Nombres qui ont du caractère (15 points)

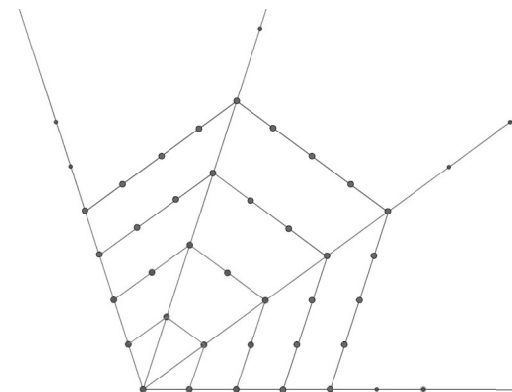
- 1) Il y a 10 nombres narcissiques à un chiffre mais aucun à deux chiffres.
- 2) On dit nombre narcissique ou nombre d'Amstrong.
- 3) Narcisse est un personnage de légende ou un affranchi de l'empereur Claude.

4) « Narcisse était un jeune homme d'une grande beauté. Il fut séduit par sa propre image reflétée dans l'eau d'une fontaine. Il mourut de ne pouvoir saisir cet autre lui-même dont il était devenu amoureux. À l'endroit de sa mort poussa une fleur qui porte son nom. »

5) 407 est narcissique car $4^3 + 0^3 + 7^3 = 407$

Nombres et formes (15 points)

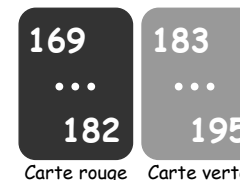
- 1) Dessins des nombres hexagonaux d'ordre 3 et 5 sur la feuille annexe.
- 2) Le nombre hexagonal de rang 4 est 28 et celui de rang 5 est 45.
- 3) Ci-contre, les dessins des nombres pentagonaux de rang 4 et de rang 5 de l'épreuve d'entraînement.



Assommantes paires à sommer ! (20 points)

1) Dans le jeu de cartes de Fabien et Maïté, la paire n°13 est la suivante :

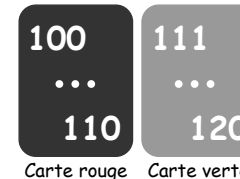
- sur la carte rouge : 169 (le carré de 13) et 182 ($169 + 13$)
- sur la carte verte : 183 ($182 + 1$) et 195 ($183 + 12$).



Carte verte

2) Maïté a le pouilleux. C'est la carte verte ci-contre, à gauche, car 121 est le carré de 11 et doit donc être le premier de la carte rouge suivante.

La carte correcte fait partie de la paire, ci-contre à droite.



3) À vous de jouer !

Maïté a énoncé 2017.

Le plus grand carré inférieur à 2017 est 44.

$44^2 < 2017 < 45^2$. 2017 est donc sur la paire n° 44.

La carte rouge est [1936 (carré de 44), 1980 ($1936 + 44$)].

La carte verte est [1981 ($1980 + 1$), 2024 ($1981 + 43$)].

Pour marquer 1 point Fabien doit donc dire « verte » et pour marquer 5 points, il doit dire « 1981 et 2024 ».

2) Tiens, un palindrome ! (10 points)

Construisons un tableau qui rassemble les données :

Conducteur	Matthieu	Sébastien	Cyril
Au compteur	14 491 km	111 911 km	125 391 km
Palindrome	14 541 km	112 211 km	125 521 km
En une heure	50 km	300 km	130 km

Avec une vitesse de 50 km/h, Matthieu roule en ville.

Avec une vitesse de 300 km/h, Sébastien roule sur un circuit.

Avec une vitesse de 130 km/h, Cyril roule sur autoroute.

3) À partir d'un mot (10 points)

Avec les lettres du mot RECTANGULAIRE, formez un maximum de mots en rapport avec le vocabulaire mathématique.

- | | | | | |
|-------------|--------------|-----------|---------------|---------------|
| 1- Aigu | 2- Aire | 3- Aligné | 4- Angle | 5- Angulaire |
| 6- Arc | 7- Are | 8- Carré | 9- Centre | 10- Intégrale |
| 11- Largeur | 12- Ligne | 13- Nul | 14- Rectangle | 15- Règle |
| 16- Tracé | 17- Triangle | 18- Un | 19- Une | 20- |

4) The leaping frog - Das Hochspringen - Saltamontes

Saute-montant (15 points)

Pour aller dans sa chambre, Rémi doit monter un escalier de 11 marches. Il adore le grimper en sautant. Rémi ne peut faire que des bonds de 2 marches ou de 3 marches.

De combien de façons peut-il monter cet escalier ? Listez-les.

Il s'agit de trouver, dans un premier temps, comment obtenir 11 en utilisant les seuls termes 2 et 3.

On obtient les deux seuls sommes : A = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 et B = 3 + 3 + 3 + 2.

Il y a cinq façons de placer le 3 par rapport aux quatre 2 dans A et 4 façons de placer le 2 par rapport aux trois 3 dans B.

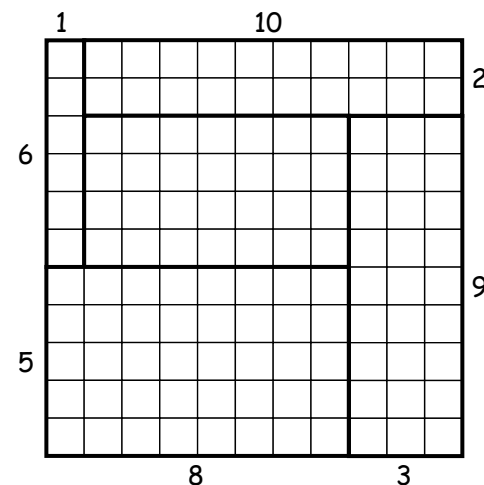
Rémi peut donc monter les escalier de 9 façons.

5) Carrément étonnant (15 points)

Les 5 rectangles réunis totalisent 121 petits carrés. Le côté du carré à réaliser est donc de 11 petits carrés.

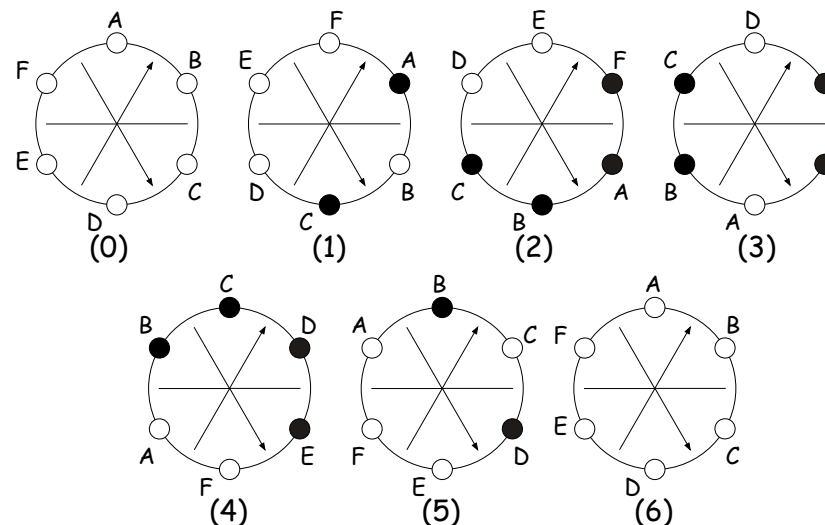
L'idée est donc de rassembler les nombres de 1 à 10 par paire dont la somme des termes est 11 :

10 + 1, 9 + 2, 8 + 3, 7 + 4 et 5 + 6, ce qui permet d'envisager les juxtapositions des rectangles, sachant que la paire (7, 4) n'entrera pas dans ces juxtapositions puisque ce sont les dimensions d'un même rectangle.



6) Disque à cran (10 points)

Pour savoir exactement de combien de crans le disque a tourné, il suffit de nommer les boules comme ci-dessous. Toutes les boules redeviennent blanches au bout d'un tour (six crans).





Bulletin - réponse

Épreuve du 14 mars 2017

2) Tiens, un palindrome ! (10 points)

	En ville	Sur autoroute	Sur circuit
Conducteur	Matthieu	Cyril	Sébastien

Explications :

Les palindromes qui suivent les nombres : 14 491 111 911 125 391
 sont : 14 541 112 211 125 521
 Les différences : 50 300 130

La différence nous donne donc la distance parcourue en une heure et donc la vitesse en km/h.

3) À partir d'un mot (10 points)

Mots formés à partir des lettres du mot « RECTANGULAIRE »

- 1- Aigu 2- Aire 3- Aligné 4- Angle 5- Angulaire
- 6- Arc 7- Are 8- Carré 9- Centre 10- Intégrale
- 11- Largeur 12- Ligne 13- Nul 14- Rectangle 15- Règle
- 16- Tracé 17- Triangle 18- Un 19- Une 20-

4) The leaping frog - Das Hochspringen - Saltamontes

Saute-montant (15 points)

Nombre de possibilités : 9

Liste des possibilités :

3 + 2 + 2 + 2 + 2

2 + 3 + 2 + 2 + 2

2 + 2 + 3 + 2 + 2

2 + 2 + 2 + 3 + 2

2 + 2 + 2 + 2 + 3

2 + 3 + 3 + 3

3 + 2 + 3 + 3

3 + 3 + 2 + 3

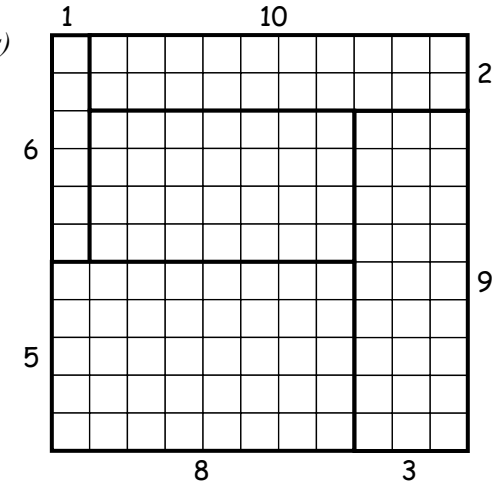
3 + 3 + 3 + 2

.....

.....

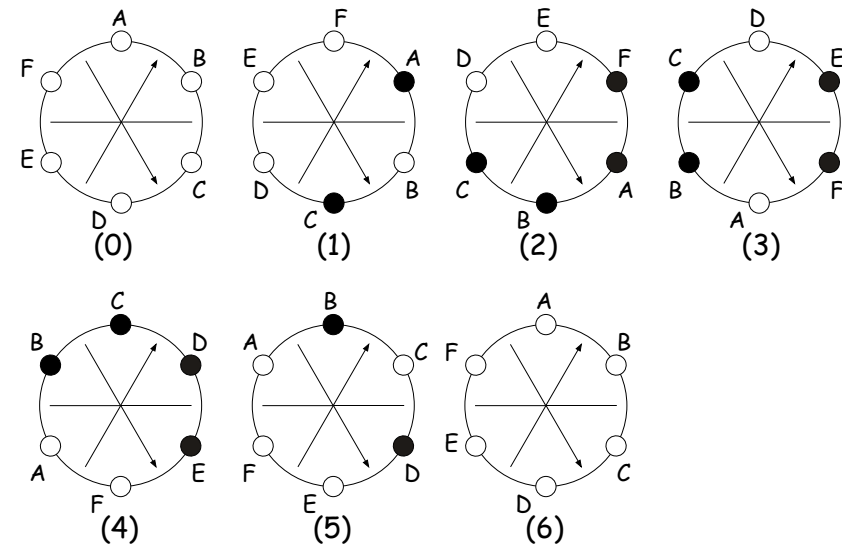
5) Carrément étonnant (15 points)

Dessinez les cinq rectangles formant un carré sur le quadrillage ci-contre.



6) Disque à cran (10 points)

Représentez ci-dessous, de cran en cran, les états successifs des boules jusqu'à ce que toutes redeviennent blanches. Entourez le numéro de la position finale.



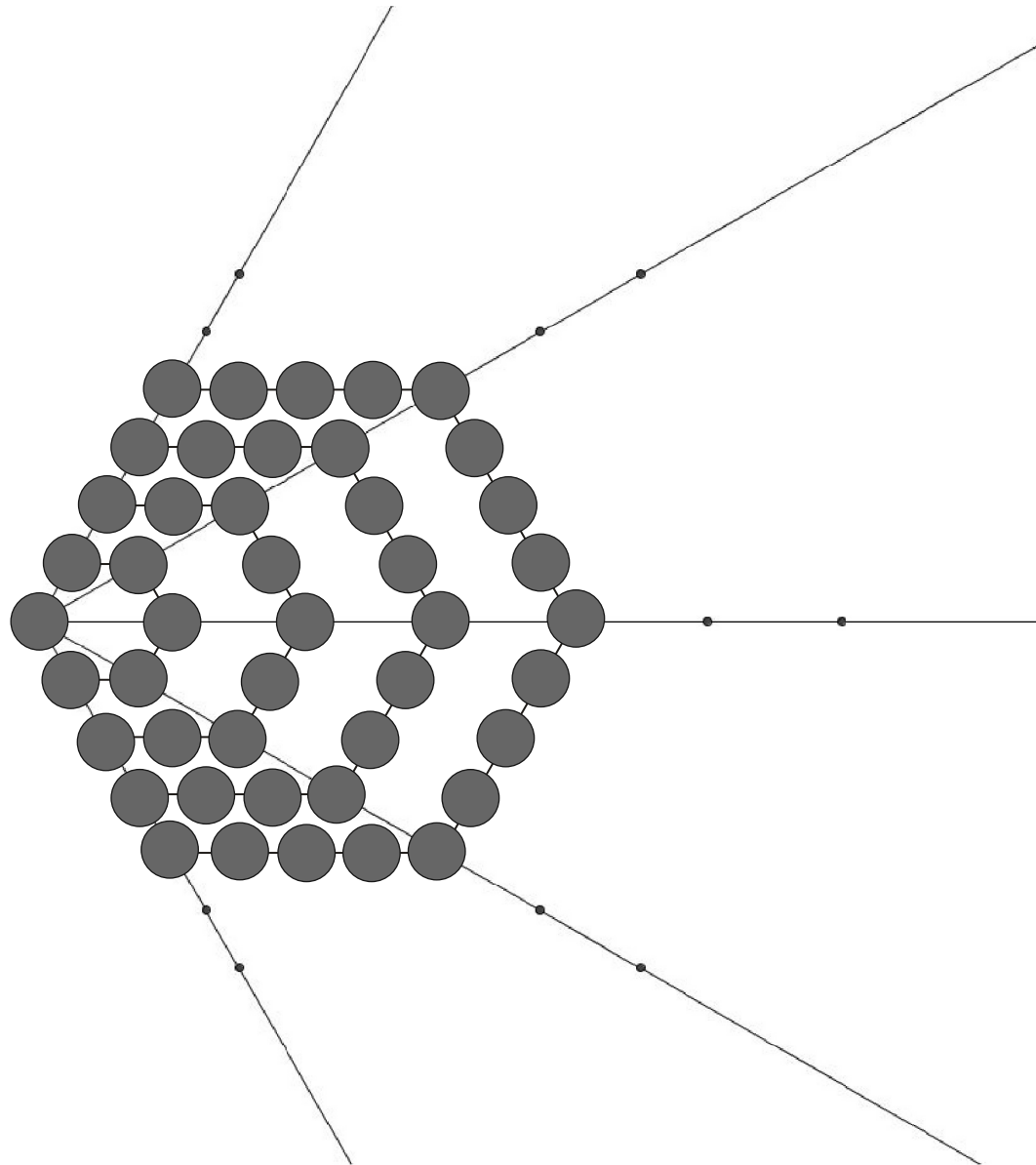
Rallye Mathématique Poitou - Charentes

Épreuve du 14 mars 2017



Annexe

Nombres et formes : nombres hexagonaux



Nombre hexagonal de rang 4 : **28**

Nombre hexagonal de rang 5 : **45**