Rallye Mathématique Poitou - Charentes

Épreuve du 14 mars 2017

Éléments de solutions

1 Nombres, formes et jeux *(35 points)*

A) Les nombres premiers (24 points)

Recherche historique

- Il s'agit du livre « Les Éléments d'Euclide » (livre IX) dont l'auteur est, bien sûr, Euclide (vers 300 avant J-C).
- **Conjecture de Goldbach** : tout nombre entier pair, supérieur à 2 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers : 666 = 661+ 5 mais aussi :
666 = 659 + 7 = 653 + 13 = 647 + 19 = 643 + 23 = 619 + 47 = 613 + 53...
- **Nombres de Mersenne** : 67 et 257 figurent par erreur dans la liste de Mersenne : $2^{67} - 1$ et $2^{257} - 1$ ne sont pas premiers. En revanche, il avait oublié 61, 89 et 107 pour lesquels $2^p - 1$ est premier.
- **Énoncé de Nicolo Tartaglia**

1 + 2 + 4 = 7 premier
1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 3 x 5 composé
1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 premier
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 = 3 x 3 x 7 composé
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127 premier
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255 composé
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511 = 7 x 73 composé.

On trouve donc deux nombres composés de suite. En fait : $1 + 2 + 4 + ... + 2^p = 2^{p+1} - 1$ et on retrouve le problème de Mersenne : 3, 5, 7 vérifient la condition, mais pas les autres.

Algorithmique (Crible d'Ératosthène)
Programme mis au point ainsi que son test sur 2017.

Anecdote ; nombres premiers circulaires
C'est le nombre 197, car 197 ; 971 et 719 sont premiers.

Des nombres qui ont du caractère

- **Paires de nombres premiers jumeaux** entre 100 et 200 : 101 et 103 ; 107 et 109 ; 137 et 139 ; 149 et 151 ; 179 et 181 ; 191 et 193 ; 197 et 199.
- **Nombres amicaux**.

220 qui s'écrit $2^2 \times 5 \times 11$ a pour diviseurs : 1, 2, 4, 5, 11, 10, 20, 22, 44, 55 et 110 dont la somme est 284.
284 qui s'écrit $2^2 \times 71$ a pour diviseurs : 1, 2, 4, 71 et 142 dont la somme est 220.
220 et 284 sont donc amicaux.
Dessin sur le thème des nombres amicaux.

B) Les nombres figurés *(3 points)*

Dessin des nombres pentagonaux.

C) Tour de magie *(3 points)*

Tout nombre formé d'un groupe répété de trois chiffres, comme 572572, s'écrit :
572 x (1000 + 1) = 572 x 1001. Or 1001 = 7 x 11 x 13. Donc tout nombre formé d'un groupe répété de trois chiffres est divisible par 7, le quotient est divisible par 11 et le nouveau quotient est divisible par 13. Le dernier quotient donne donc le nombre de trois chiffres dont on est parti.
Par exemple : 573 573 divisé par 7 donne 81 939, qui divisé par 11 donne 7 449, qui divisé par 13 donne 573.

D) Pour se détendre *(5 points)*

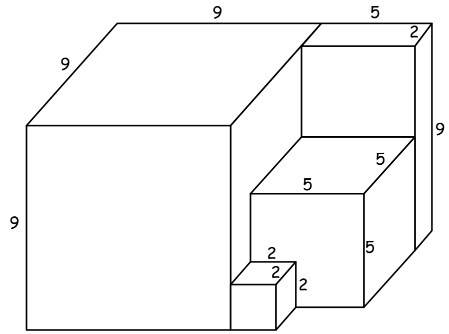
Le 24
Avec 8, 11, 3, 7 : **24** = (11 - 8) x 7 + 3
Avec 15, 5, 7, 3 : **24** = 15 + 5 + 7 - 3

② Proverbe labyrinthique *(10 points)*

Déplacements horizontaux, verticaux ou diagonaux :
IL FAUT QU'UNE PORTE SOIT OUVERTE OU FERMÉE !

I	T	Q	U	P	O	R
L	A	U	U	N	E	T
U	F	I	O	S	E	M
V	O	T	E	O	R	E
E	R	T	U	F	E	E

③ Un solide insolite *(15 points)*



Le dessin ci-contre fait apparaître les trois cubes d'arêtes respectives 9, 5 et 2 et le parallélépipède rectangle de dimensions 9, 5 et 2.
Le volume total est donné par le calcul :
$9^3 + 5^3 + 2^3 + 9 \times 5 \times 2 = \mathbf{952}$
(présence insistante des chiffres 9, 5 et 2)
L'aire totale est donnée par le calcul :

$2 \times 9^2 \quad + \quad 2 \times (9 \times 14) \quad + \quad 2 \times (9 \times 14 - 2 \times 3) = \mathbf{654}$

Vues de gauche et de droite — Vues de devant et de derrière — Vues de dessus et de dessous

④ Le patchwork tricolore *(15 points)*

Nous désignons les trois couleurs par leurs initiales en anglais : B, W, R.

Partons de la case centrale pour trouver l'ensemble des possibilités. Si la case centrale est bleue, les deux autres cases bleues sont obligatoirement disposées en coin, d'où les deux possibilités ci-contre à un déplacement ou une symétrie près.

B		
	B	
		B

B		B
	B	

Dans la première possibilité, la case 1 peut être blanche ou rouge ; la case 2 est alors rouge ou blanche. La couleur des autres cases est alors déterminée. Mais les deux dispositions obtenues sont les mêmes à un demi-tour près.

	1	2
B	W	R
R	**B**	W
W	R	**B**

	1	2
B	R	W
W	**B**	R
R	W	**B**

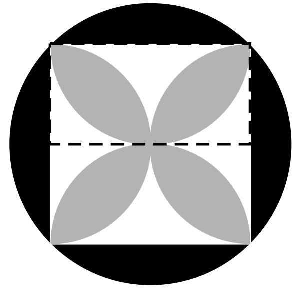
Dans la deuxième possibilité, la case 1 peut être blanche ou rouge ; la case 2 est alors obligatoirement rouge ou blanche sinon deux des cases restantes adjacentes auraient la même couleur. La couleur des autres cases est alors déterminée. Il y a donc deux dispositions possibles.

	1	
B	W	**B**
R	**B**	R
W	R	W
	2	

	1	
B	R	**B**
W	**B**	W
R	W	R
	2	

Il y a donc trois possibilités de disposer les trois couleurs dans le cas où la case centrale est bleue.
Avec la case centrale blanche ou rouge, il y a en tout 9 couvertures différentes.

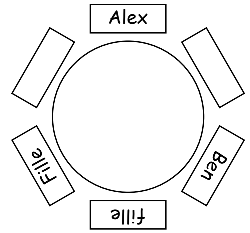
⑤ Le logo *(10 points)*

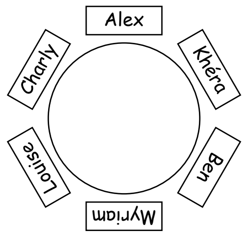


Si on note R le rayon du disque, d'après le théorème de Pythagore, le côté du carré intérieur a pour longueur $R\sqrt{2}$.
La zone noire a donc une aire de : $\pi R^2 - 2R^2 = (\pi - 2)R^2$.
La zone blanche est constituée de quatre « triangles circulaires » dont chacun a pour aire la différence entre l'aire du rectangle en pointillés (moitié de l'aire du carré) et celle d'un demi-disque de rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, soit $R^2 - \frac{1}{2}\pi\frac{R^2}{2} = (1 - \frac{\pi}{4})R^2$.
Le total de l'aire de la zone blanche est donc : $(4 - \pi)R^2$.
L'aire de la zone grise s'obtient par différence entre l'aire totale du disque et la somme des aires noire et blanche, soit : $\pi R^2 - (\pi - 2)R^2 - (4 - \pi)R^2 = (\pi - 2)R^2$.
La zone noire et la zone grise ont donc toutes les deux la même aire : $(\pi - 2)R^2$; la zone blanche a pour aire $(4 - \pi)R^2$. et $4 - \pi < \pi - 2$. C'est donc la zone blanche qui occupe le moins d'espace.

⑥ Déjeuner entre amis *(10 points)*

Alex a une fille en face de lui et Ben n'est pas à côté d'Alex. Deux filles sont assises côte à côte. On a donc la disposition ci-contre à une symétrie près.





Khéra est entre deux garçons ; elle est donc entre Ben et Alex.
Myriam n'est pas en face de Khéra ; c'est donc Louise, et Myriam est en face d'Alex.

C'est donc Ben qui est en face de Charly.

⑦ La Nouvelle Orléans en 1725 *(15 points)*

En 1725 La Nouvelle Orléans aux Etats-Unis était une toute petite ville dont le plan de construction ressemblait à un quadrillage presque parfait.
Pour aller de l'intersection A à l'intersection B monsieur de Bienville pouvait suivre le chemin indiqué sur le plan. Mais il existait aussi d'autres chemins **de la même longueur** pour aller de A à B. Combien au total y en avait-t-il ?

Il y a 35 chemins différents possibles. En effet, si on note D un déplacement d'un cran vers la droite et H un déplacement d'un cran vers le haut, cela revient à compter le nombre de « mots » différents de 7 lettres contenant trois lettres D et quatre lettres H.

Bulletin - réponse

Épreuve du 14 mars 2017

② Proverbe labyrinthique *(10 points)*

Voici le proverbe : IL FAUT QU'UNE PORTE SOIT OUVERTE OU FERMÉE !

③ Un solide insolite *(15 points)*

Volume total : $9^3 + 5^3 + 2^3 + 9 \times 5 \times 2 = \mathbf{952}$

Remarque curieuse : Présence remarquable de 9, 5 et 2 : les arêtes des cubes, les dimensions du parallélépipède et les chiffres du résultat !

Aire totale : $2 \times 9^2 + 2 \times (9 \times 14) + 2 \times (9 \times 14 - 2 \times 3) = \mathbf{654}$

Calculs :

④ Le patchwork tricolore *(15 points)*

Nombre de couvertures différentes : **9**

Quatre couvertures possibles :

B	W	R
R	B	W
W	R	B

B	W	B
R	B	R
W	R	W

B	R	B
W	B	W
R	W	R

W	R	B
B	W	R
R	B	W

⑤ Le logo *(10 points)*

Zone de plus petite aire : C'est la **zone blanche**.

Explications :

- La zone noire (grand disque noir - carré blanc) a une aire de : $\pi R^2 - 2R^2 = (\pi - 2)R^2$.
- L'aire totale de la zone blanche (4 triangles « circulaires ») est : $(4 - \pi)R^2$.
- L'aire de la zone grise s'obtient par différence entre l'aire totale du disque et la somme des aires noire et blanche, soit : $\pi R^2 - (\pi - 2)R^2 - (4 - \pi)R^2 = (\pi - 2)R^2$.

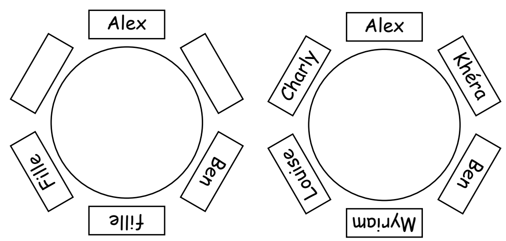
La zone noire et la zone grise ont donc toutes les deux la même aire : $(\pi - 2)R^2$; la zone blanche a pour aire $(4 - \pi)R^2$, et $4 - \pi < \pi - 2$.

⑥ Déjeuner entre amis *(10 points)*

C'est **Ben** qui est en face de Charly.

Explications :

On peut placer dans un premier temps Alex, Ben et deux filles.
On place alors Khéra entre Ben et Alex, puis Louise, Myriam et Charly.



⑦ Nouvelle Orléans en 1725, *(15 points)*

Nombre de chemins de A à B : **35**

Explications :

Si on note D un déplacement d'un cran vers la droite et H un déplacement d'un cran vers le haut, cela revient à compter le nombre de « mots » différents de 7 lettres contenant trois lettres D et quatre lettres H.