Rallye Mathématique Poitou - Charentes

Épreuve du 19 mars 2013

2e

Éléments de solutions

1 Les codes secrets (35 points)

(A) Les codes étudiés à l'épreuve d'entraînement

1°) Décodage du message :

- Première ligne, avec le code de César :
PRQSU HPLHU HVWXQ HYLOO HQRUP DQGH
MONPR EMIER ESTUN EVILL ENORM ANDE

- deuxième ligne, avec le code de César (clé 12, donc -12 pour le décodage),
YAZPQ GJUQY QQEFX GZPQE OUZCE QZE
MONDE UXIEM EESTL UNDES CINQS ENS

- troisième ligne, avec le code du « cancre »*,
BENPL KEENO GRKMF INLFC CECFD OKFIN IECE
LESUC REEST PARFO ISCOM MEMON TROIS IEME

- quatrième ligne, avec le code de César (clé 22, donc -22 pour le décodage)
KJNAJ YKJPN AOKQR AJPIK JPKQP AJWQO PNWHE A
ONREN CONTR ESOUV ENTMO NTOUT ENAUS TRALI E

2°) Réponse

Mon premier est une ville normande : CAEN
Mon deuxième est l un des cinq sens : GOÛT
Le sucre est parfois comme mon troisième : ROUX
On rencontre souvent mon tout en Australie : KANGOUROU

*** Le code du « cancre »**
Avec le tableau des fréquences d'apparition des lettres dans un texte écrit en français donné dans l'épreuve d'entraînement et l'analyse fréquentielle du poème, la substitution utilisée était la suivante :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
R	A	L	Y	E	M	T	H	I	Q	U	B	C

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	F	G	J	K	N	O	P	S	V	W	X	Z

Le poème à décoder était « Le cancre " de Jacques Prévert.

Il dit non avec la tête,
Mais il dit oui avec le cœur.
Il dit oui à ce qu'il aime,
Il dit non au professeur.
Il est debout,
On le questionne,
Et tous les problèmes sont posés.
Soudain, le fou rire le prend
Et il efface tout,
Les chiffres, les mots,
Les dates et les noms,
Les phrases et les pièges.
Et malgré les menaces du maître,
Sous les huées des enfants prodiges,
Avec des craies de toutes les couleurs,
Sur le tableau noir du malheur,
Il dessine le visage du bonheur.

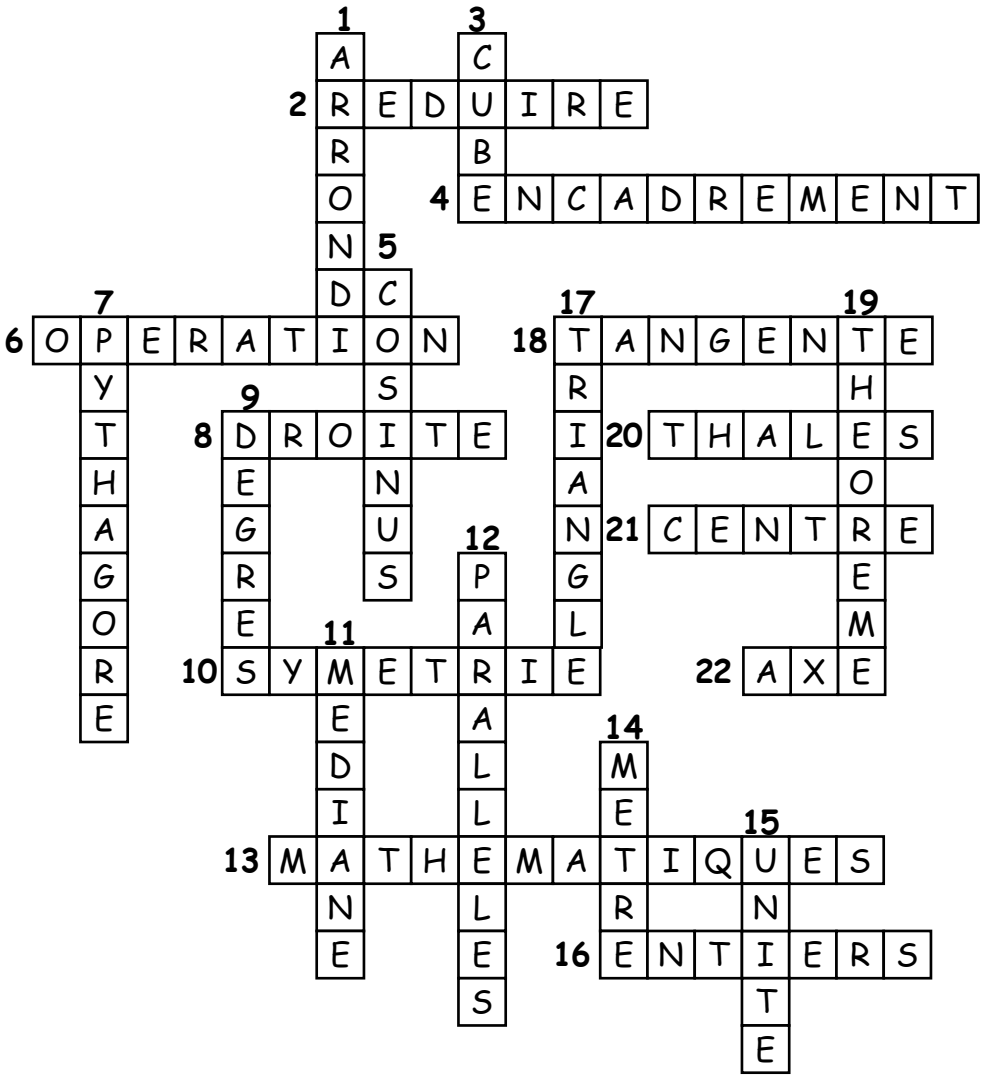
(B) Le code de Léa Broutille

1°) La réponse à la charade de la question précédente **(A)** était KANGOUROU. Avec le code de Léa Broutille, cette réponse devenait L**LOUVILFI**A ou D**LOUVILFI**T ou ..., la partie en caractère gras étant toujours la même quelque soit la clé choisie.

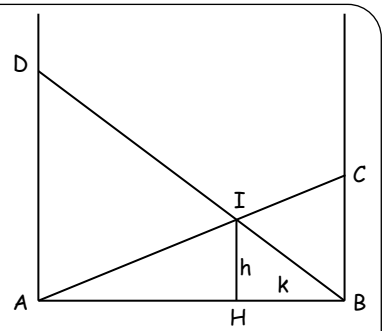
2°) Il s'agissait de coder « LE CODE DE LEA BROUTILLE », avec la clé W.
On obtient :
HQECRSIEDIELQFABTFINBUXQW, les espaces étant considérés comme des caractères notés ☐ dans ce code.

3°) L'expression codée **dvurw ☐ jx ☐ c** se termine par la lettre **c** qui est donc la clé du message en clair : AU REVOIR

2 Chemin de mots (10 points)



3 Les deux échelles (10 points)



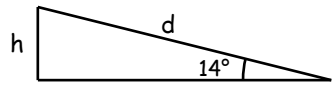
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle BAD rectangle en A, puis dans le triangle ABC, rectangle en B. On obtient successivement :

$AD = \sqrt{7{,}5^2 - 6^2} = 4{,}5$ et $BC = \sqrt{6{,}5^2 - 6^2} = 2{,}5$

Soit IH = h et HB = l. D'après l'énoncé de Thalès, on a $\frac{h}{4{,}5} = \frac{k}{6}$ et $\frac{h}{2{,}5} = \frac{6 - k}{6}$. Donc $4{,}5 \times \frac{k}{6} = 2{,}6 \times \frac{6 - k}{6}$.

On en déduite que $k = \frac{15}{7}$; et donc $h = \frac{4{,}5 \times 15}{7 \times 6} = \frac{45}{28}$, soit environ 1,61 m.

4 Bonne altitude (10 points)



Si h est l'accroissement de l'altitude et d la longueur de la montée, on a $\frac{h}{d} = \sin 14°$.

Par ailleurs d = vt où v représente la vitesse de 5 m/s, t la durée de la montée (8 min 50 s = 530 s). Donc d = 2650 mètres. On a alors h= 2650 x sin 14°, soit h ≈ 641 m et l'altitude est donc : 641 + 1372, soit **2013 m**.

5 Hunger Games (15 points)

1°) Pour acheter 5 années de vie à Charlotte, **Robin lui donne un billet de 9 lierces ; Charlotte lui rend un billet de 3 et une pièce de 1, car 9 - 3 - 1 = 5.**

2°) Pour acheter 21 années de vie à Robin, **Charlotte lui donne un billet de 27 lierces et un billet de 3. Robin lui rend un billet de 9, car 27 - 9 + 3 = 21.**

3°) Pour acheter 2013 années de vie, **Charlotte donne un billet de 2187 lierces et un de 81 lierces. Robin lui rend un billet de 243 lierces, un de 9 et un de 3, car 2187 - 243 + 81 - 9 - 3 = 2013.**

La solution réside dans la décomposition de chaque nombre en base trois ; les coefficients des puissances de 3 sont 0, 1 ou 2. Si c'est 0, cela n'ajoute rien ; si c'est 1, on le garde ; si c'est 2, on écrit 2 = 3 - 1. Ainsi :

$5 = 3 + 2 = 3 + 3 - 1 = 2 \times 3 - 1 = (3 - 1) \times 3 - 1 =$ **9 - 3 - 1**.

$21 = 2 \times 3^2 + 3 = (3 - 1) \times 3^2 + 3 =$ **27 - 9 + 3**.

$2013 = 2 \times 3^6 + 2 \times 3^5 + 2 \times 3^3 + 3^2 + 2 \times 3$

$= (3 - 1) \times 3^6 + (3 - 1) \times 3^5 + (3 - 1) \times 3^3 + 3^2 + (3 - 1) \times 3$

$= 3^7 - 3^6 + 3^6 - 3^5 + 3^4 - 3^3 + 3^2 + 3^2 - 3 = 3^7 - 3^5 + 3^4 - 3^3 + (3 - 1) \times 3^2 - 3$

$= 3^7 - 3^5 + 3^4 - 3^2 - 3 =$ **2187 - 243 + 81 - 9 - 3**.

6 Des boîtes (15 points)

1°) Une boîte B3 contient 16 calculatrices et se compose de 21 boîtes : une B3, quatre B2 et seize B1.
Une boîte B2 contient 4 calculatrices et se compose de 5 boîtes : une B2 et quatre B1.
On a : 23 = 16 + 4 + 3 x 1. Il faut donc une boîte B3, une B2 et trois B1, soit en tout 21 + 5 + 3 = 29.

2°) Pour l'envoi de 64 calculatrices, il faut une boîte B4, contenant quatre boîtes B3, soit 4 x 21 + 1 = **85 boîtes** (ou encore 64 boîtes B1 contenus dans 16 boîtes B2, elles-mêmes contenues dans 4 boîtes B3, le tout contenu dans une boîte B4).

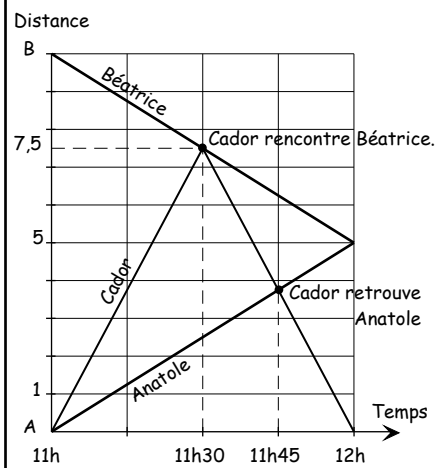
3°) Par un raisonnement analogue, pour avoir 32 boîtes (32 = 21 + 2 x 5 + 1), il faut une boîte B3, deux boîtes B2 et une boîte B1, soit 16 + 2 x 4 + 1. L'envoi avec 32 boîtes contenait donc **25 calculatrices**.

4°) S'il existe un envoi avec 35 boîtes, cela ne peut être que pour un nombre de boîtes supérieur à 25, d'après la question précédente.
Pour 26 calculatrices, il faut 26 boîtes B1, six boîtes B2, une boîte B3, soit 33 boîtes.
Pour 27 calculatrices, il faut 27 boîtes B1, six boîtes B2, une boîte B3, soit 34 boîtes.
Pour 28 calculatrices, il faut 28 boîtes B1, sept boîtes B2, une boîte B3, soit 36 boîtes.
Il n'y a donc pas d'envoi avec 35 boîtes.

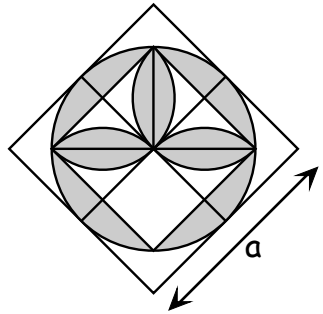
7 Histoire d'un aller-retour (10 points)

Puisque Cador va à une vitesse triple de celle de Béatrice, lorsqu'ils se rencontreront, Cador aura parcouru les trois quarts des 10 km qui les séparaient et Béatrice un quart.
Béatrice aura donc parcouru 2,5 km et Cador 7,5 km. Ils auront marché ou couru une demi-heure.
Pendant ce temps, Anatole aura aussi parcouru 2,5 km. Cador et Anatole seront distants de 5 km. Par un raisonnement analogue, Cador rejoindra Anatole après avoir fait 3,750 km et Anatole 1,250 km, soit après un nouveau quart d'heure. Cador rencontrera donc Anatole 45 minutes après le départ, soit à **11h45**.

Résolution graphique



8 La fleur de lys (15 points)



Voici un vitrail qui existait il y a très longtemps et qui est représenté sur ce schéma.
Le grand cercle est inscrit dans le grand carré. Chaque lunule limitée par deux quarts de cercle a un de ses sommets au centre de la figure et son autre sommet sur le grand cercle.
La légende dit que la surface grisée est égale à la moitié de celle du grand carré ? Est-ce vrai ? Expliquez.

Si l'on appelle **a** la longueur du côté du grand carré, l'aire totale est donc $\mathbf{a^2}$.
La surface grisée est composée :
- d'un disque de rayon $\frac{a}{2}$, auquel on enlève un carré de côté $2 \times \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,
- de trois « pétales », dont l'aire de chacune s'obtient (compte-tenu de la symétrie) en retranchant à l'aire d'un demi-disque de rayon $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, celle d'un triangle rectangle isocèle de base $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ et de hauteur $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. L'aire de l'ensemble grisé est donc :

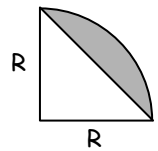
$$\left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) + 3\left(\frac{\pi a^2}{16} - \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{3\pi a^2}{16} - \frac{3a^2}{8}, \text{ soit } \frac{(7\pi - 14)a^2}{16}.$$

Le rapport de la partie grisée par rapport à la partie totale est donc :

$$\frac{7}{16} \times (\pi - 2) \approx 0{,}4994 \text{ ce qui est très proche de } 0{,}5.$$

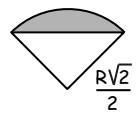
La légende se trompe donc, même si, à vue, il est difficile d'apprécier la différence entre les aires des zones grises et blanches.

Autre approche



Lunule 1 : un quart de cercle privé d'un triangle rectangle isocèle.

$$\text{L'aire } A1 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{(\pi - 2)R^2}{4}$$



Lunule 2 : un quart de cercle privé d'un triangle rectangle isocèle.

$$\text{L'aire } A2 = \frac{\pi R^2/2}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{R^2}{2} = \frac{(\pi - 2)R^2}{8}$$

L'aire totale $A = 4 \times A1 + 6 \times A2 = \frac{7}{4} \times (\pi - 2)R^2$. L'aire du grand carré est $K = 4R^2$.
On retrouve le rapport des aires de la première approche.

Remarque

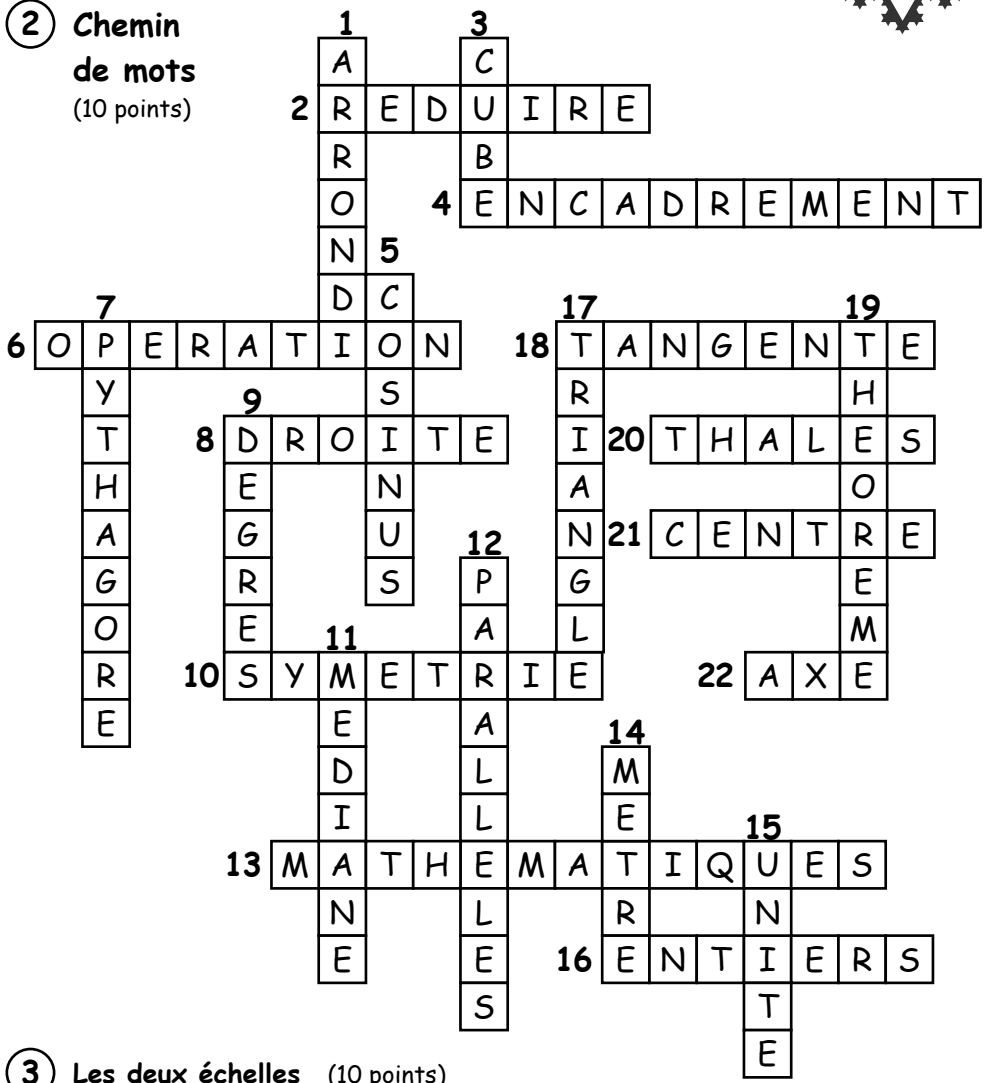
L'aire du grand carré K est rationnelle, celle de la surface grisée A est irrationnelle (le nombre π intervient). A ne peut donc être égale à la moitié de K.

Bulletin - réponse

Épreuve du 19 mars 2013

2 Chemin de mots

(10 points)



3 Les deux échelles (10 points)

Les deux échelles se croisent à environ 1,61 m de la chaussée.
Explications : Calcul de AD et BC par le théorème de Pythagore, puis calcul de la hauteur à l'aide du théorème de Thalès dans les triangles BAD et ABC.

4 Bonne altitude (10 points)

Le pied des pistes se trouve à environ 2013 m.
Explications : à raison de 5m/s pendant 530 s, la distance parcourue est de 2650 m. L'angle avec l'horizontale étant de 14°, le dénivelé est 2650 x sin 14°, soit environ 641 m et le pied des pistes se trouve 1372 m plus haut, soit 2013 m.

5 Hunger Games (15 points)

1°) Ce que Robin donne à Charlotte : **1 billet de 9 lierces.**
Ce que Charlotte lui rend : **un billet de 3 et une pièce de 1.**
2°) Ce que Charlotte donne à Robin : **un billet de 27 lierces et un billet de 3.**
Ce que Robin lui rend : **un billet de 9 lierces.**
3°) Ce que Charlotte donne à Robin : **un billet de 2187 lierces et un de 81.**
Ce que Robin lui rend : **un billet de 243 lierces, un de 9 et un de 3.**

6 Des boîtes (15 points)

1°) Explication des 29 boîtes : 23 = 16 + 4 + 3 x 1. Il faut donc une boîte B3, une B2 et trois B1, soit en tout 21 + 5 + 3 = 29
2°) Nombre de boîtes pour 64 calculatrices : Une boîte B3 contient 16 calculatrices et se compose de 21 boîtes : une B3, quatre B2 et seize B1. Or 64 = 4 x 16. Il faut donc 4 x 21 + 1 = 85 boîtes en tout.
3°) Nombre de calculatrices dans 32 boîtes : 32 = 21 + 2 x 5 + 1, il y a une boîte B3, deux boîtes B2 et une boîte B1, soit 16 + 2 x 4 + 1 = 25 calculatrices.
4°) 35 boîtes ? Explications : Pour 27 calculatrices, il faut 34 boîtes, et pour 28 calculatrices, il faut 36 boîtes. Il ne peut pas y avoir d'envoi avec 35 boîtes.

7 Histoire d'un aller-retour (10 points)

Réponse : Cador retrouvera son maître à 11 h 45
Explications : .Cador va à une vitesse triple de celle de Béatrice et aura donc parcouru 3/4 des 10 km lorsqu'il rencontrera Béatrice en une demi heure. Il se trouve alors à 5 km d'Anatole puisque ce dernier avait parcouru 2,5 km. Il mettra un quart d'heure pour rejoindre son maître.

8 La fleur de lys (15 points)

Réponse : l'aire de la surface grisée est légèrement inférieure à la moitié de l'aire totale : dans le rapport 0,4994.
Explications : Calcul de l'aire grisée par additions et soustractions d'aires de disques, de carrés et de triangles rectangles isocèles.