RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - Épreuve 2006 - **Éléments de solutions**

1 **Eratosthène de Cyrène** (15 points)

- Époque à laquelle il a vécu : il est né à Cyrène vers –284. Il devient aveugle et se laisse mourir de faim. Il meurt à Alexandrie vers –192.
- Ses activités professionnelles : il a été directeur (conservateur) de la grande Bibliothèque d'Alexandrie en –236.
- Ses recherches scientifiques :

En 230 avant J.C., Ératosthène propose une méthode purement géométrique pour mesurer la taille de la Terre.

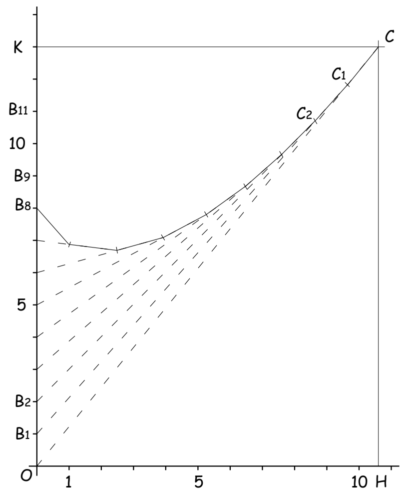
On lui doit aussi le crible qui porte son nom (Crible d'Ératosthène) et qui consiste à déterminer les premiers nombres premiers.

2 **Commémorations** (5 points par problème - maximum 15 points)

Benjamin Franklin est né en 1706, Charles de Coulomb est mort en 1806. 1906 a vu la naissance des mathématiciens André Weil et Jean Dieudonné, membres fondateurs du groupe Bourbaki. Le chimiste Henri Moissan et le physicien Joseph John Thomson ont été prix Nobel cette même année. C'est aussi en 1906 qu'Alzheimer a identifié la maladie qui porte son nom et que la bouteille Thermos a été inventée par Sir James Dewar. Irène Joliot-Curie est décédée en 1956. Mais aucune classe n'a signalé que Pierre Curie est mort brutalement en 1906, écrasé par un camion.

3 **Poursuite** (15 points)

Léa Broutille marche à 2m/s et Bourbaki à 3m/s. Quand Léa est en B8, Bourbaki est en C8. Quand elle est en B9, son chien est alors en B8. Comme Bourbaki gagne 1 mètre sur sa maîtresse à chaque seconde, il la rejoint finalement en B11 au bout de 5,5 secondes. Ils sont donc à 11 m du point O à 12 h 5,5 s.



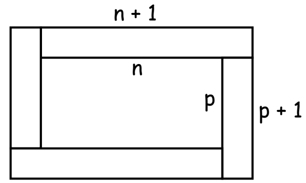
4 **Énigme numérique** (5 points)

111 = 3x37. A = 1, A = 3, A = 37 ou A = 111.
Deux solutions : A = 1, B = 1 et A - B = 0 ; A = 37, B = 27 et A – B = 10

5 **Cour de Mat et Matic** (10 points)

2006 = 59 x 17 x 2. Il y a donc 17 côtés de carreaux sur le demi – périmètre.
Les possibilités sont les suivantes (Longueur, largeur) : (14, 3), (13, 4), (12, 5), (11, 6), (10, 7) et (9, 8).
Le nombre de carreaux extérieurs 2(L + l – 2) est constant : 30 ;
le nombre de carreaux intérieurs (L – 2)(l – 2) est respectivement : 12, 22, 30, 36, 40 et 42.
Les dimensions de la cour de Mat et Matic comprend donc 12 carreaux dans la longueur et 5 carreaux dans la largeur, soit 12 x 59 cm = 708 cm et 5 x 59 cm = 295 cm.

Complément : Quels sont tous les rectangles ayant autant de carreaux sur le pourtour qu'à l'intérieur ?
Notons n et p les dimensions du rectangle intérieur.
2(n + 1) + 2(p + 1) = np ; np – 2n - 2p – 4 = 0 ; (n – 2)(p – 2) = 8.
Si n – 2 = 8 et p – 2 = 1 alors n = 10 et p = 3 ; les dimensions du rectangle sont donc 12 et 5.
Si n – 2 = 4 et p – 2 = 2 alors n = 6 et p = 4 ;
les dimensions du rectangle sont donc 8 et 6.



6 **Le piano extraterrestre** (15 points)

Désignons par c' b' a b c cinq touches successives. Partant de la touche a, il y a neuf triplets possibles : aaa, aab, aab', aba, abb, abc, ab'a, ab'b' et ab'c'
Si la touche a est la dernière à droite (respectivement à gauche), il faut éliminer les triplets comportant b et c (resp. b' et c'). Il reste donc 5 triplets possibles.
Si la touche a est l'avant-dernière à droite (respectivement à gauche), il faut éliminer les triplets comportant c (respectivement c'). Il reste alors 8 triplets possibles.
Il y a donc 2x(5 + 8) = 26 triplets possibles avec les quatre touches des extrémités du clavier.
Il reste 2006 – 26 = 1980 triplets pour les autres touches, soit 1980 : 9 = 220 touches.
Il y a donc en tout 224 touches sur ce piano.

7 **Mauvaise entente** (10 points)

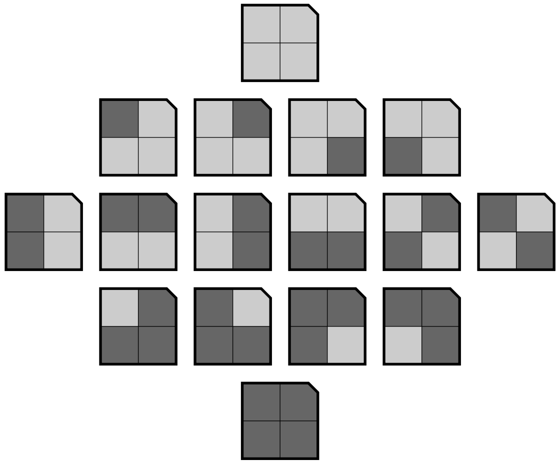
Alex et Alain roulent dans un premier temps à 300 m/min. À leur séparation, Alain roule alors à 700 m/min pendant 5 min. Il parcourt donc 3500 m pendant qu'Alex parcourt 1500 m. Ils sont donc à 2000 m l'un de l'autre. Alain retourne à 500 m/min. Ils se rapprochent donc à raison de 800 m/min. Ils se retrouveront au bout de 2,5 min. Alex a donc roulé seul pendant 7,5 min. Il a donc parcouru 2250 mètres.

8 **Une devinette bien cachée** (10 points)

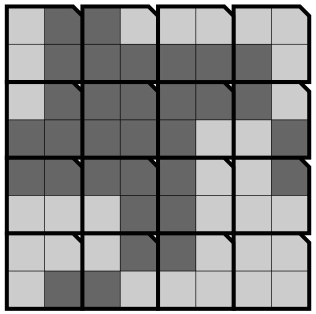
Le message est : « À quels siècles Eratosthène a-t-il vécu ? »
Réponse : Aux 3ème et 2ème siècles avant J-C.

9 Carrés chromatiques (15 points)

Il y a 16 carrés différents (dessin ci-dessous).



Une solution sur le tore : la règle de juxtaposition (les zones de deux côtés adjacents doivent être de la même couleur) est respectée aussi sur les bords (gauche – droite) et (haut – bas).



En reproduisant ce carré dans tout le plan, on obtient le motif du tissu « pied de poule ».

10 Le disque (15 points)

On remarque tout d'abord que s'il n'y avait, sur le disque, qu'une succession de nombres de la forme 2006, ceux-ci tourneraient sans se modifier. Il n'existe sur le disque qu'une zone d'irrégularité, entre l'arc 2006 et l'arc 1. Voyons comment évoluent les chiffres à cet endroit

2006ème position — position n°1

20062006**20**20062006	avant le premier coup
62006200**62**6200620062	après le premier coup
06200620**06**0620062006	après le deuxième coup
00620062**00**0062006200	après le troisième coup
20062006**20**00062006	après le quatrième coup
62006200**62**00062006200	après le cinquième coup
06200620**06**20006200620	après le sixième coup

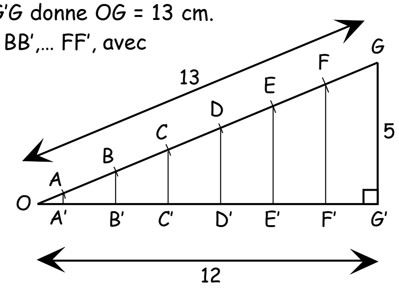
À partir de la fin du troisième coup, les chiffres vont donc tourner sans irrégularité, avec un bloc de quatre zéros consécutifs. Le 6 qui est dans l'arc 3 au bout du troisième coup sera, au bout du 2006ème coup, dans l'arc 2006. La réponse est donc 6.

11 Jouons aux cubes (5 points)

Les pièces A et B contiennent chacune deux petits cubes noirs. Tout assemblage de ces pièces ne permet d'obtenir qu'un nombre pair de petits cubes noirs. Or le grand cube en compte 13. Il n'y a donc aucune solution.
Complément : 3 pièces A et 4 pièces B donnent 13 petits cubes blancs et 14 petits cubes noirs. Ces sept pièces permettent-elles de réaliser un grand cube dont, cette fois, les coins sont noirs, en respectant bien sûr l'alternance des couleurs ?

12 Exercice bien ficelé (10 points)

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle *OG'G* donne *OG* = 13 cm.
Il y a donc six tours de ficelle de rayons successifs *AA'*, *BB'*,… *FF'*, avec
OA = 1 cm, *OB* = 3 cm, *OC* = 5 cm … *OF* = 11 cm.
Le théorème de Thalès dans le triangle *OGG'*, donne :
AA' + *BB'* + … + *FF'* = (1 + 3 + 5 + … + 11) x 5/13.
La somme des longueurs des cercles est donc
2πx36x5/13 = 360π/13.
La longueur nécessaire de ficelle est donc de
360π/13 + 4,8.
Il faut donc environ 92 cm de ficelle.



13 Des calculs pour cette année (15 points)

1) 2006 = 59 x 17 x 2. Les deux nombres cherchés sont donc A = 59 et B = 34.
2) Trois possibilités pour A : $59 = 7^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 = 5^2 + 5^2 + 3^2 + 0^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2$.
On a donc a = 7, b = 3, c = 1, d = 0 ; a = 5, b = 5, c = 3, d = 0 ; a = 5, b = 4, c = 3, d = 3,
3) Deux possibilités pour B : $34 = 5^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 4^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$.
on a donc e = 5, f = 2, g = 2, h = 1 ; e = 4, f = 4, g = 1, h = 1.
4) Pour a = 7, b = 3, c = 1, d = 0 et e = 5, f = 2, g = 2, h = 1
on a **P** = 35 + 6 + 2 + 0 = **43** ; **Q** = 14 – 15 + 1 – 0 = **0** ; **R** = 14 – 3 – 5 + 0 = **6** ; **S** = 7 + 6 – 2 – 0 = **11**.
5) **T** = $43^2 + 0^2 + 6^2 + 11^2$ = **2006**.
Voici les autres possibilités avec T toujours égal à 2006.
Pour a = 7, b = 3, c = 1, d = 0 et e = 4, f = 4, g = 1, h = 1, on a P = 41 ; Q = 17 ; R = 0 ; S = 6.
Pour a = 5, b = 5, c = 3, d = 0 et e = 5, f = 2, g = 2, h = 1, on a P = 41 ; Q = (-12) ; R = (-10) ; S = 9.
Pour a = 5, b = 5, c = 3, d = 0 et e = 4, f = 4, g = 1, h = 1, on a P = 43 ; Q = 3 ; R = (-12) ; S = (-2).
Pour a = 5, b = 4, c = 3, d = 3 et e = 5, f = 2, g = 2, h = 1, on a P = 42 ; Q = (-13) ; R (-3) ; S = (-8).
Pour a = 5, b = 4, c = 3, d = 3 et e = 4, f = 4, g = 1, h = 1, on a P = 42 ; Q = 4 ; R = 1 ; S = (-15).

14 Il y a le ciel, le soleil et la mer (10 points)

L'aire A des quatre croissants est égale à l'aire totale de la figure (le carré central et les quatre demi - disques) moins l'aire du cercle central.
Si le carré a pour côté 2a, son aire est $4a^2$; le rayon du cercle central est $a\sqrt{2}$ et son aire est donc $2\pi a^2$.
L'aire des quatre demi – disques est $2\pi a^2$.
L'aire des quatre croissants est donc
$A = 4a^2 + 2\pi a^2 - 2\pi a^2 = 4a^2$, c'est-à-dire l'aire du carré.