

RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU - CHARENTES - 4 avril 2006

1 ÉRATOSTHÈNE (15 points)

À partir de vos recherches, présentez un dossier d'une à deux pages sur Ératosthène, dans lequel devront figurer les renseignements suivants :

- Époque à laquelle il a vécu : dates et lieux de naissance et de décès.
- Ses activités professionnelles : leurs natures et les lieux dans lesquels il les a exercées.
- Ses recherches scientifiques : leurs natures et les lieux dans lesquels il les a menées.



2 Commémorations (5 points par problème - maximum 15 points)

Nous vous proposons, dans l'épreuve d'entraînement, des petits problèmes commémorant le centenaire de la mort de Jules Verne en 2005.

Quelle commémoration d'auteurs ou d'événements scientifiques avez-vous choisie pour 2006 ?

Donnez-nous les problèmes que vous avez imaginés et leur solution.

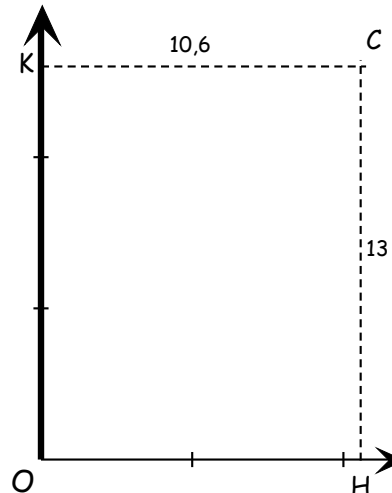
3 Poursuite (15 points)

Léa Broutille parcourt un sentier longeant un champ. Elle marche d'un pas régulier à 7,2 km/h. À midi, elle est au point O et se dirige vers K. Son chien, Bourbaki, se trouve au point C (10,6 ; 13). OH = 10,6 m et OK = 13 m.

Voulant rejoindre sa maîtresse, il procède ainsi : la première demi-seconde, il se dirige vers O. Il arrive ainsi au point C₁. Mais Léa Broutille est alors en B₁. Bourbaki répète le manège : il se dirige vers B₁ pendant la demi-seconde suivante et arrive en C₂ alors que Léa Broutille arrive en B₂ et ainsi de suite. Une fois sur le sentier, Bourbaki doit y rester jusqu'à rejoindre sa maîtresse.

Sachant que la vitesse de Bourbaki est de 10,8 km/h, à quelle heure rejoindra-t-il sa maîtresse et à quelle distance de O ?

NB : Ce problème se résout graphiquement (échelle 1 cm pour 1 m). La qualité du tracé a, ici, une importance fondamentale.



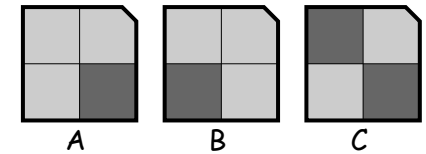
4 Énigme numérique (5 points)

A et B sont deux entiers naturels compris entre 0 et 100. On sait que :

- * 111 est un multiple de A ;
- * A - B est un entier divisible par 10 ;
- * B est le cube d'un entier.

Retrouvez A et B. Existe-t-il plusieurs solutions ?

9 Coloured squares (15 points) Cuadrados cromáticos farbige Rechtecke



This game consists of 16 different square pieces, which are divided into four square parts coloured in yellow or green. These parts are orientated : the cut corner must always be in the top right-hand corner. Consequently parts A and B (see the shape above) are different.

Draw, colour, and cut those 16 pieces. Put these pieces in the shape of a square, and make sure that their orientation is such as 2 neighbouring zones are the same colour.

Este juego se compone de 16 piezas cuadradas distintas, divididas en cuatro zonas cuadradas de color amarillo o verde. Estas piezas son orientadas : el rincón cortado siempre debe colocarse arriba y a la derecha. Así las piezas A y B (figura de arriba) son distintas.

Dibujad, coloread y recortad estas 16 piezas. Disponed estas piezas según un cuadrado, respetando su orientación y de tal manera que, en su yuxtaposición, dos zonas vecinas sean del mismo color.

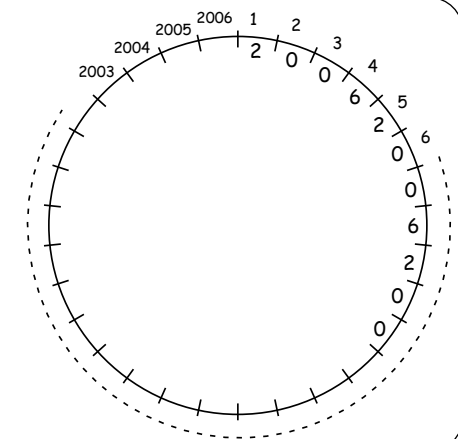
Dieses Spiel zählt 16 verschiedene viereckige Stücke. Jedes Stück besteht aus vier rechteckigen grauer oder grünen Zonen. Bei diesen Stücken soll sich die abgeschnittene Ecke immer oben rechts befinden. So sind stücke A und B (siehe überstehende Figur) anders.

Zeichnen Sie, malen Sie und schneiden Sie diese 16 Stücke. Ordnen Sie diese Stücke in ein Viereck an (die abgeschnittene Ecke soll sich immer oben rechts befinden) so dass zwei nebeneinanderstellende Zonen dieselbe Farbe haben.

10 Le disque (15 points)

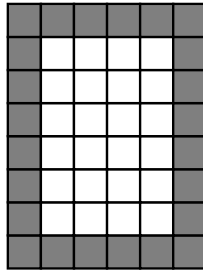
Un cercle est partagé en 2006 arcs numérotés de 1 à 2006. L'arc 1 porte le chiffre 2, les arcs 2 et 3 portent le chiffre 0, l'arc 4 porte le chiffre 6 et ainsi de suite. Puis on fait subir à ces chiffres les transformations suivantes : tous les 2 deviennent des 6, les 0 qui côtoient un 2 deviennent 2 et tous les autres chiffres deviennent 0. Et on répète cette opération 2006 fois.

Quel chiffre y aura-t-il sur l'arc numéro 2006 au bout de 2006 coups ?



5 Cour de Mat et Matic (10 points)

La cour rectangulaire ci-contre est composée d'autant de carreaux rouges sur le pourtour que de carreaux ivoire à l'intérieur. Mat et Matic ont aussi une cour rectangulaire, de dimensions différentes et dont le périmètre est 2006 cm. Ils la pavent avec les mêmes carreaux carrés de 59 cm de côté en choisissant les mêmes couleurs : rouge sur le pourtour, et ivoire à l'intérieur. Ils constatent alors qu'il y a, comme dans l'autre cour, autant de carreaux de chaque couleur. Quelles sont les dimensions de leur cour ?



6 Le piano extraterrestre (15 points)

Dans ce monde lointain, les habitants adorent le piano et sont très habiles de leurs trente doigts. Contrairement à nos pianos, les leurs n'ont pas de touches noires, et ont par contre beaucoup plus de touches blanches. Sur leur piano, ils jouent des triplets de notes de la façon suivante : ils commencent par une note, puis soit ils la rejouent, soit ils jouent une des touches immédiatement à côté, et ils répètent cette opération une seconde fois. Combien y a-t-il de triplets possibles commençant par une touche d'une extrémité du clavier ? Et pour les autres touches ? Sachant qu'il existe 2006 triplets différents de notes sur cette planète, combien de touches a leur piano ?

7 Mauvaise entente (10 points)

Alex et Alain Térieur se promènent à bicyclette à la vitesse de 18 km/h tout en bavardant. Mais ils en viennent à se disputer, et Alain, très en colère, part à la vitesse de 42 km/h, laissant Alex continuer à la même vitesse. Au bout de 5 minutes, Alain a des remords : il se rend compte qu'il a eu tort de s'emporter. Voulant s'excuser auprès de son ami, il fait demi-tour et rejoint Alex à la vitesse de 30 km/h. Quelle distance Alex a-t-il parcourue tout seul ?

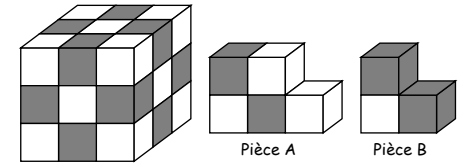
8 Une devinette bien cachée (10 points)

Lagos demande à sa sœur Arsinoé :
 « Pose-moi la question que tu veux, je suis bien certain d'y trouver la réponse sans tarder ! »
 - Tu sembles bien sûr de toi. Je vais y réfléchir... »
 Quelques instants plus tard :
 « Voici ma question, elle est cachée sur cette bande de papier. Pour la découvrir, tu n'auras besoin que des outils qui garnissent ta trousse d'école. Je connais ton empressement. Aussi je te donne un conseil : une fois la bande découpée, tu pourras ranger tes ciseaux. Je ne doute pas que tu trouveras la réponse à ma question dès que tu l'auras déchiffrée ! »
 Le message codé d'Arsinoé est reproduit ci-dessous. Aidez Lagos à reconstituer le message et à y répondre



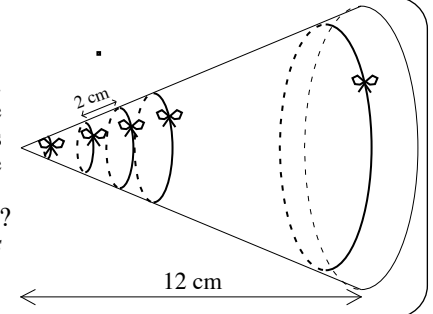
11 Jouons aux cubes (5 points)

En utilisant des pièces A et des pièces B, on désire construire un cube plein de côté 3 où les petits cubes unités blancs alternent avec les petits cubes unités noirs (dessin ci-contre). On dispose d'autant de pièces A et B qu'on le souhaite. Cette construction est-elle possible ?



12 Exercice bien ficelé (10 points)

Un rôti a la forme d'un cône de 12 cm de hauteur. Sa base a un diamètre de 10 cm. Le boucher ficelle ce rôti en l'entourant par des cercles de ficelle tous les 2 cm à partir de la base. Il ferme chaque cercle avec un nœud qui utilise 0,8 cm de ficelle. Quelle longueur de ficelle le boucher a-t-il utilisée ? Donnez la valeur approchée par excès à 1 cm près de la longueur de la ficelle.



Supplément pour la classe de Seconde

13 Des calculs pour cette année (15 points)

- 1) Trouvez deux nombres entiers A et B positifs tels que $A > B > 20$ et $AB = 2\,006$.
- 2) Trouvez quatre nombres entiers a, b, c et d positifs ou nuls tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = A$.
- 3) Trouvez quatre nombres entiers e, f, g et h strictement positifs tels que $e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = B$ (certains de ces nombres peuvent être égaux).

- 4) Calculez les nombres P, Q, R et S tels que :
 $P = ae + bf + cg + dh$
 $Q = af - be + ch - dg$
 $R = ag - bh - ce + df$
 $S = ah + bg - cf - de$
- 5) Calculez le nombre $T = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$.

14 Il y a le ciel, le soleil et la mer (10 points)

Pour montrer que les vacanciers profitent autant du ciel et du soleil que de la mer, une commune du littoral a choisi le logo ci-contre construit à partir d'un carré inscrit dans un cercle, avec quatre demi-cercles de diamètres les côtés du carré. L'ensemble des croissants (zone gris clair) représente le ciel et le soleil, et le carré (zone foncée) représente la mer. Est-ce que les deux zones, claire et foncée, ont bien la même aire ?

