RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - Épreuve 2005

Éléments de solutions (page 1)

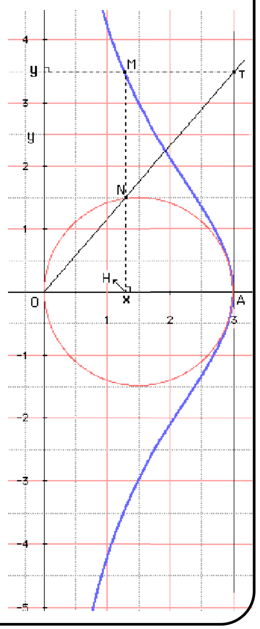
1 Maria Gaetana AGNESI (15 points)

- Émilie de Breteuil, marquise du Châtelet (1706 – 1749) a traduit en français les « principes mathématiques de philosophie naturelle » (Principia) de Newton.
- Fontenelle (1657 – 1757), écrivain français neveu de Corneille, fut célèbre pour ses traités de vulgarisation scientifique. Membre de l'Académie française. Il parlait, pour Maria Agnesi, de l'Académie des sciences.
- Maria Gaetana Agnesi est née le 16 mai 1718 à Milan en Italie et est décédée le 6 janvier 1799 à Milan.

Elle s'est rendue célèbre par l'écriture du livre « Les institutions analytiques » qui est à l'époque l'ouvrage le plus complet et le plus pédagogique sur le calcul différentiel. Ce livre était destiné, à l'origine, à la formation mathématique de ses frères et sœurs.

- Elle a aussi étudié la courbe appelée cubique (ou sorcière) d'Agnesi. [L'historique du nom "sorcière d'Agnesi" est assez étrange. Agnesi l'avait nommée "verseria" dans son traité, qui vient du latin tourner. John Colson, traducteur en anglais d'Agnesi, aurait lu "aversiera", qui signifie justement sorcière (www.bibmath.net)].
- Le pape Benoît XIV lui a proposé la chaire de mathématique de **l'université de Bologne** ; mais elle a refusé.

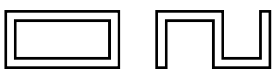
Voici, à droite, de ce texte la cubique d'Agnesi.



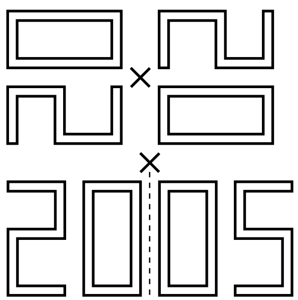
2 2005 : Une année fertile (20 points)

Cendrillon, pour ses 20 ans, est la plus jolie des enfants. Elle est conviée à un bal masqué (ohé, ohé) accompagnée de ses sœurs. Elle se vit offrir une robe de bal confectionnée avec du tissu en rouge et en noir par ses amies les souris. Folles de jalousie de sa beauté, ses sœurs, pour l'empêcher de venir au bal, déchirèrent sa magnifique robe en 61 morceaux. La jeune fille effondrée demanda aux souris de lui rapiécer sa robe et elles découvrirent que les morceaux de tissu rouge "au carré" et les morceaux de tissu noir "au carré" faisaient 2005. Sachant qu'il y a plus de morceaux de tissu rouge que de tissu noir, combien y a-t-il de morceaux de tissu de chaque couleur ?

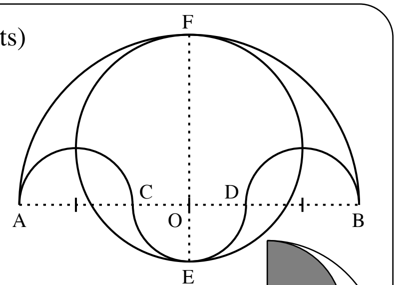
A partir de la figure ci dessous, obtenir le nombre 2005 en utilisant trois transformations différentes. Chacune ne peut être utilisée qu'une fois.



La première transformation est une symétrie centrale. le deuxième transformation (la rotation) ne s'applique pas à l'image précédente ; mais c'est tout de même une bonne idée. La dernière transformation est alors la symétrie axiale.



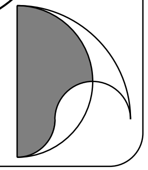
3 Le bijou de Belinda Fram-Heto (15 points)



Soit R = OA (= 2 cm). Le rayon des petits cercles est R/3.

$$\mathcal{A}(\text{salinon}) = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{18} = \frac{8\pi R^2}{18} = \frac{4}{9}\pi R^2 = \frac{16}{9}\pi.$$

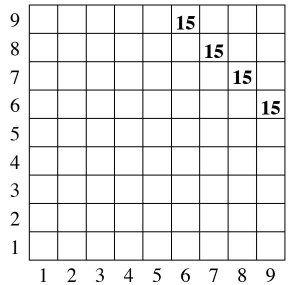
$$\mathcal{A}(\text{cercle}) = \pi\left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\pi R^2 = \frac{16}{9}\pi. \quad \mathcal{A}(\text{salinon}) = \mathcal{A}(\text{cercle})$$

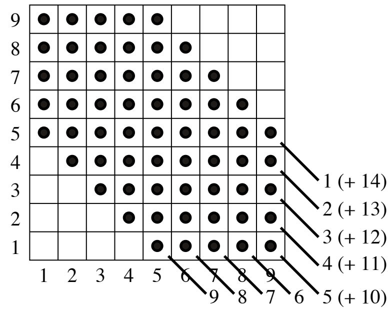


Par symétrie, le demi-cercle et le demi-salinon sont d'aire égale. Grisons la partie commune aux deux figures. Les deux pétales sont donc les compléments d'aires égales de la partie grisée. Les quatre pétales sont donc d'aires égales.

4 2005 : L'addition de l'espace *de Stanley Cubik* (15 points)

Stanley Cubik a donc trouvé 4 fois la somme 15 dans le carré.





Pour le cube, procédons par couches successives : sur la couche du bas, repérée par le nombre 1, il faut considérer les sommes 14 ; sur la couche repérée par le nombre 2, il faut considérer les sommes 13 et ainsi de suite, jusqu'à la dernière couche repérée par le nombre 9 où il faut considérer la somme 6. Ces choix successifs sont matérialisés sur le dessin ci-dessus par les points disposés en diagonale.

Ainsi, comme 2x5 + 2x6 + 2x7 + 2x8 + 1x9 = 61, **Stanley rencontre 61 fois le nombre 15**.

Le 14 et le 16 sont rencontrés seulement 60 fois.

5 Une aînée de 3 jours pour 3 années ! (5 points)

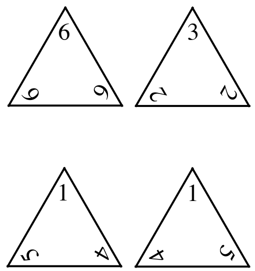
Entrer dans sa trente et unième année, c'est avoir trente ans révolus. Chantal qui n'a pas encore trente ans est donc dans sa trentième année. Maryse est donc née le 30 décembre 1973 et Chantal le 2 janvier 1974.

6 Logigrilles (10 points)

À droite de chaque numéro de cadre figure sa valeur en "triangles". C'est le cadre 3 qui a la plus grande valeur. 1 - ***7*** 2 - ***5*** 3 - ***9*** 4 - ***4*** 5 - ***8*** 6 - ***5*** 7 - ***7*** 8 - ***7***

NATURE ne peut pas être le premier mot codé à cause de l'emplacement des deux lettres identiques. Il est donc codé par le deuxième mot qui permet de trouver le mot cherché : BUREAU qui est un meuble. Ce qui donne la réponse 3.

7 Triomino (10 points)



Les pièces du jeu « Triomino » sont des triangles équilatéraux ayant sur une seule face et à chaque sommet un nombre de 1 à 6. Toutes les pièces sont différentes. Combien ce jeu comporte-t-il de pièces ?
Puisqu'il y a 6 valeurs possibles pour chaque sommet, il y a donc 6 pièces triples et 6 x 5 = 30 pièces doubles.
Il y a (6 x 5 x 4)/6 façons de choisir trois nombres parmi six pour obtenir les pièces simples. Mais chaque choix donne deux pièces, par symétrie (fig. ci-contre). Il y a donc 40 pièces simples.
Il y a donc en tout 76 pièces dans ce jeu.

8 Palindrome (5 points)

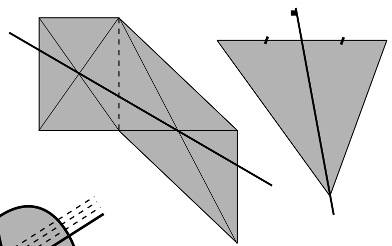
La différence la plus souvent rencontrée entre deux palindromes consécutifs de quatre chiffres est 110 (2662 - 2552 par exemple) et 100 pour les palindromes à 5 chiffres (35353 - 35253 par exemple). Les plus petites différences se rencontrent aux changements de milliers ou de dix milliers. **Elle est de 11** pour les palindromes à 4 chiffres (2002 - 1991 par exemple) et pour les palindromes à 5 chiffres (30003 - 29992). **Elle n'est que de 2** quand on passe du dernier palindrome à 4 chiffres au premier palindrome à 5 chiffres (10001 - 9999).

9 Tour de piste (5 points)

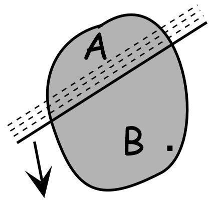
Soit r le rayon du petit cercle du gobelet et R le rayon du grand cercle.
Le gobelet faisant dix tours sur lui-même pour faire un tour complet de "piste", on a :
$2\pi r \times 10 = 2\pi \times 30$ et $2\pi R \times 10 = 2\pi \times 40$. D'où r = 3 cm et R = 4 cm.
On aurait pu aussi demander la hauteur du gobelet !

10 De part en part (10 points)

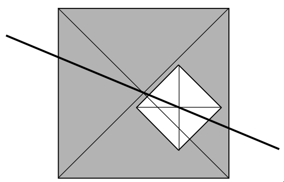
Pour partager ces figures en deux aires égales, il suffit de faire passer la droite par les centres de symétrie des carrés, rectangle ou parallélogramme. Pour le triangle, il suffit de tracer une médiane.



Mais ce ne sont pas les seules solutions.
Rappelons que toute droite qui "balaye" une surface la partage obligatoirement en deux aires égales à un instant donné.



A < B puis B < A. Donc, à un moment donné, A = B.



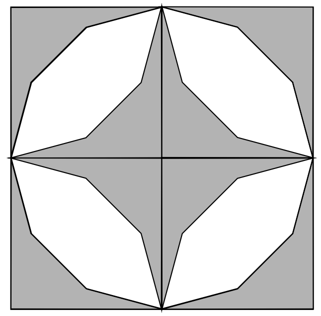
11 Les J.O. de Pékin. (10 points)

Si on dispose chaque lettre dans son cercle il y a 2 ou 3 zones possibles à chaque fois. Si l'on tolère que 2 lettres puissent être dans la même zone cela donne un total de 2x3x3x3x2 = 108 dispositions différentes. Parmi celles-ci on compte celles où 2 lettres se trouvent dans la même zone :
1) P et E dans la même zone. 3x3x2 = 18 dispositions.
2) E et K dans la même zone. 2x3x2 = 12 dispositions.
3) K et I dans la même zone. 2x3x2 = 12 dispositions.
4) I et N dans la même zone. 2x3x3 = 18 dispositions.

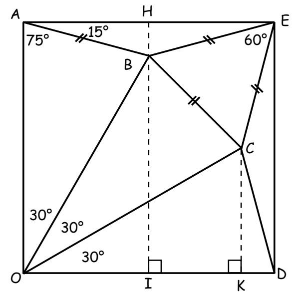
Comme 3 lettres ne peuvent se trouver dans la même zone, les dispositions 1) et 2) ne se recouvrent pas ; de même pour 2) et 3), et de même pour 3) et 4).
Il y a 2 dispositions communes au 1) et 3). Il y a 3 dispositions communes au 1) et 4).
Il y a 2 dispositions communes au 2) et 4). Finalement on obtient :
108 – (18 + 12 + 12 + 18) + (2 + 3 + 2) = 55 dispositions répondant au problème.

Compléments pour la classe de Seconde

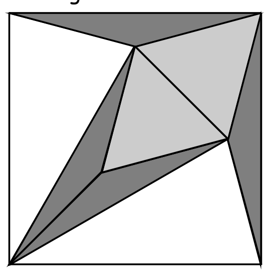
12 Une belle surface (15 points)



Voici le dessin du dodécagone et de l'étoile obtenue par découpage. Pour gagner de la place, l'étoile a été inscrite dans le dodécagone, ce qui vous donnera certainement des idées de recherches..
A(OCD) = OD x CK/2 = (R x R sin30°) x 0,5 = 25 x 0,25 cm^2
A(Dodécagone) = 12 A(OCD) = 75 cm^2 .
Et donc l'aire de l'étoile est égale à 25 cm^2, c'est-à-dire à 1/3 de l'aire du dodécagone !
Fort de cette remarque, voici comment obtenir ce résultat par découpage. Considérons un quart de figure : l'angle $\widehat{DOB}$ est de 60°. I est donc le milieu de [OD]. Le point B est donc sur la médiatrice de [OD], et ABE est donc un triangle isocèle.



Compte tenu des valeurs des angles portées sur le dessin, on en déduit que BCE est un triangle équilatéral. D'où le découpage suivant qui montre que le quart d'étoile a la même aire que chacun des trois triangles isocèles de sommet O.



13 Au supermarché (5 points)

Soit x la masse de matière sèche et y la masse totale. On a : $\frac{40}{100}x = \frac{7,9}{100}y$; $\frac{x}{y} = \frac{7,9}{40} = \frac{19,75}{100}$

La masse liquide représente donc 80,25 % de la masse totale.