RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - 6 avril 2004

Éléments de solutions

1 Sophie Germain (15 points)

- Sophie Germain est née le 1er avril 1776 à Paris et est décédée le 27 juin 1831 à Paris.
- Elle avait 18 ans lorsqu'elle a vécu cette période terrible de la « Terreur » (1793-1794) pendant la Révolution française.
- Elle correspondait avec Lagrange sous le nom de Le Blanc et se faisait passer pour **un** élève de l'école Polytechnique. À cette époque, les femmes étaient mal vues dans le milieu des sciences, et en tant que femme, elle n'aurait pas été prise au sérieux. Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) était un mathématicien français.
- Pierre de Fermat était un mathématicien français (1601 – 1665). Il conjectura que l'équation $x^n + y^n = z^n$ $(x, y, z \neq 0)$. n'a de solutions entières que pour n ≤ 2.

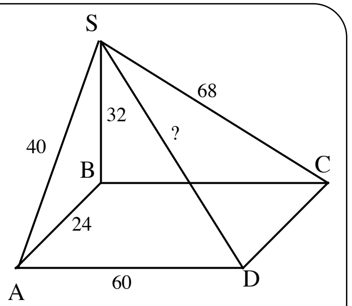
Pour n = 2, on reconnaît le théorème de Pythagore !

- $(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2) = [(n^2 + 2) + 2n][(n^2 + 2) - 2n] = (n^2 + 2)^2 - 4n^2$
$= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = n^4 + 4$
- $n^4 + 4 = 1\,718\,786\,550\,629 = 1\,313\,317 \times$ **1 308 737**.
- Une conjecture est une proposition considérée comme fortement probable, mais qui n'est pas encore démontrée.

2 Cinémath (5 points)

Les trois séances de plus à l'Euclidiovisuel ont réuni 2004 - 4 x 354 = 2004 – 1416, soit 588 places. L'Euclidiovisuel contient donc le tiers de 588, soit **196** places.

3 D'un coup de baguettes (15 points)



Les côtés de la base rectangulaire de la pyramide sont obligatoirement les baguettes de longueurs 24 cm et 60 cm. Le volume permet de déterminer la hauteur de la pyramide : 15,36 dm³ = 15360 cm³.
(15360 x 3)/(24 x 60) = 46 080/1440 = 32, ce qui permet de s'assurer que la baguette de longueur 32 est bien perpendiculaire à la base. Le théorème de Pythagore ou sa réciproque permet de montrer qu'il faut utiliser les baguettes 40 et 68 pour les triangles SBA et SBC qui sont rectangles en B.

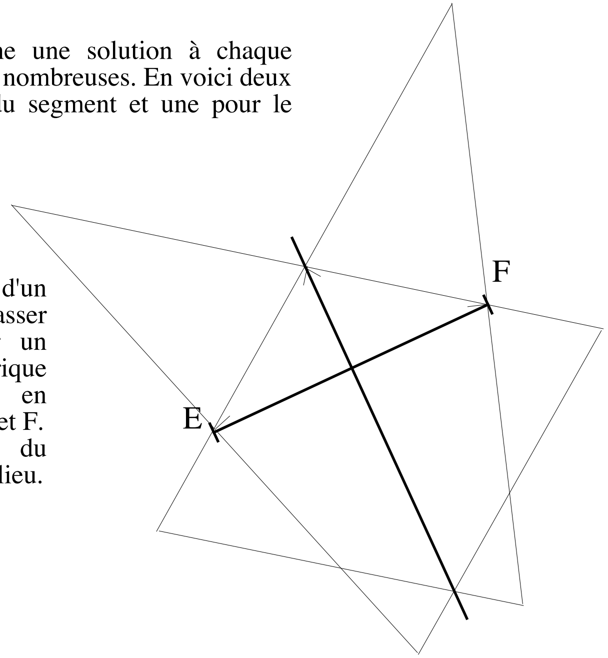
Le théorème de Pythagore permet de calculer $BD^2 = 4176$, puis $SD^2 = 5200$.
On en déduit que la dernière baguette mesure $\sqrt{5200} = 20\sqrt{13}$

4 Le menteur (10 points)

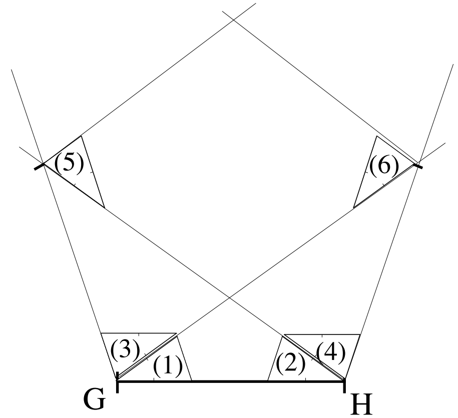
Que Coralie ou Anthony soit le menteur, les propos de Déborah sont dans tous les cas contradictoires.
Si c'est Déborah qui est la menteuse, ce sont les propos de Jonathan qui sont alors contradictoires. Il ne reste plus que le vilain Jonathan comme menteur et finalement comme coupable. Une relecture de l'énoncé permet de s'en convaincre.

8 Trianglor (15 points)

La feuille en annexe donne une solution à chaque problème. Les solutions sont nombreuses. En voici deux autres, une pour le mlieu du segment et une pour le pentagone.



Placer le milieu d'un côté d'un trianglor en E et faire passer l'autre côté par F. Placer un deuxième trianglor symétrique par rapport au premier en intervertissant les rôles de E et F. On obtient la médiatrice du segment [EF] et donc son milieu.



En plaçant le trianglor successivement dans les positions données par l'ordre des numéros, on obtient le pentagone. Cette solution et celle de la feuille annexe reposent sur le fait que l'angle intérieur d'un pentagone est de 108°.
108° = 180° - 72° pour la solution de la feuille annexe, et 108° = 72° + 36° pour la solution ci-contre.

9 Le voyage d'Émile IV (10 points)

Émile IV met 100 000 s pour parcourir les 2 004 000 m, soit 27 h 46 min et 40 s. Il va donc s'arrêter 13 fois 20 min et 04 s, soit 15652 s ou 4 h 20 min 52 s. Il mettra donc en tout 32 h 7 min 32 s pour parcourir les 2004 km.
Il arrivera le 22/04/2004 à 4h 11 min 32 s.

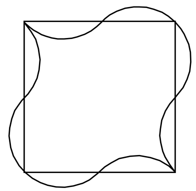
5 Le cadeau d'Annie Versaire (15 points)

Pour que les nombres se suivent de 50 en 50, il suffit de multiplier ceux du premier carré magique (qui se suivent de 1 en 1) par 50. La somme de ce nouveau carré magique est donc 30 x 50 = 1500. Mais on veut que la somme du carré magique soit de 2004. Il faut donc augmenter cette somme de 2004 – 1500 = 504. Puisqu'il y a 4 nombres par ligne, il faut donc augmenter chaque nombre de 504 : 4 = 126. Il suffit maintenant de « translater » tous les nombres du carré magique précédent de 126 ; et on obtient le carré magique ci-contre.

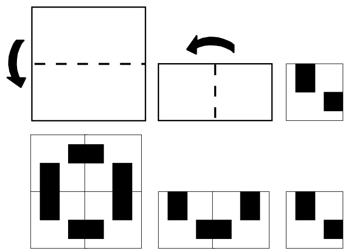
826	576	326	276
126	476	626	776
676	726	176	426
376	226	876	526

6 De tommettes en tommaths (10 points)

L'aire d'une tommath est la même que celle d'un carré de diagonale la distance entre les pointes de la tommath. L'aire de l'ensemble des tommaths du dessin est donc égale à l'aire du carré ABCD. Cette aire est la moitié du carré de côté AC, c'est-à-dire 16 x 16 = 256. Comme il y a 64 tommaths dans ce carré, l'aire d'une tommath est 256/64 = 4.



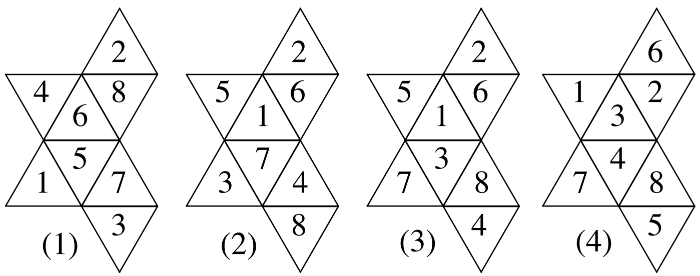
7 Logigrilles (15 points)

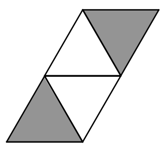


a) En « remontant » les flèches à partir du motif final on obtient le dessin ci-contre. C'est donc la figure 5 qui convient.
b) L'observation des dispositions des motifs les uns par rapport aux autres permet de procéder par élimination
Il reste les assemblages 1, 4, 5 et 8.

c) Propositions de logigrilles.
Voici la meilleure proposition que nous avons trouvée. **Elle émane de la 3ème B du collège de Montguyon. Bravo à cette classe.**

Sur un dé en forme d'octaèdre, la somme des faces opposées est égale à 9. Voici quatre dispositions des points sur un patron d'octaèdre. Lesquelles sont correctes ?





La réponse est (2). Les faces opposées sont repérables dans les patrons d'octaèdre par les triangles grisés de la configuration ci-dessus.

10 Les dés sont jetés (10 points)

Avec 3 dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, combien peut-on écrire de nombres de 3 chiffres ? Quel est le plus petit ; quel est le plus grand ? Combien y a-t-il de nombres qu'on ne peut pas écrire entre le plus grand et le plus petit ?

On peut écrire 6 x 6 x 6 = 216 nombres à trois chiffres donnés par trois dés. Le plus petit est 111 et le plus grand est 666.

Première solution : Entre ces deux nombres, on ne peut pas écrire les nombres qui contiennent en chiffres des dizaines ou en chiffres des unités un 0, un 7, un 8 ou un 9.
À partir de 111, il y a 117, 118, 119, 120 ; 127, 128, 129, 130, jusqu'à 167, 168, 169, 170, c'est-à-dire 4 x 6 = 24 nombres puis tous les nombres de 171 à 211, c'est-à-dire 40. Ainsi, entre 111 et 611 il y a 5 x (24 + 40) = 320 nombres. Reste à compter ceux qu'on ne peut pas écrire entre 611 et 666 : 617 à 620, 627 à 630, 637 à 640, 647 à 650 et 657 à 660, c'est-à-dire 4 x 5 = 20 nombres. Il y a donc en tout 340 nombres qu'on ne peut pas écrire entre 111 et 666.

Deuxième solution : De 111 à 666 il y à 556 nombres (bornes comprises). Or on ne peut en écrire que 216 (dont 111 et 666). Il y a donc 556 – 216 = 340 nombres qu'on ne peut pas écrire entre 111 et 666.

Compléments pour la classe de Seconde

11 Le lièvre et le chien (15 points)

Première solution : 7 sauts de chien égalent 11 sauts de lièvres ; donc 1 saut de chien égale 11/7 de saut de lièvre.
En 4 sauts de chien, c'est-à-dire en 44/7 de sauts de lièvre, le lièvre fait 6 sauts, soit 42/7 sauts de lièvres.
En 4 sauts, le chien gagne donc 2/7 de sauts de lièvre. Or il a 9 sauts de lièvres en retard, soit 63/7 de saut de lièvre. Il lui faut donc rattraper 31,5 x 2/7 de saut de lièvre et donc faire 31,5 x 4 = 126 sauts.

Deuxième solution : Prenons la longueur d'un saut de chien comme unité de longueur et le temps d'un saut de chien comme unité de temps.
Si un saut de lièvre est désigné par l, alors $11l = 7$, d'où $l = 7/11$.
Sachant que le lièvre fait 6 sauts pendant que le chien en fait 4, le lièvre parcourt donc une distance de $6l = 42/11$ dans un temps égal à 4. Sa vitesse est donc de 42/44.
Compte tenu du choix des unités, la distance x parcouru par le chien répond à l'équation $x = t$. L'avance du lièvre étant de $9l$, soit 63/11, la distance x parcourue par le lièvre répond à l'équation $x = 21/22\ t + 63/11$. À la rencontre, nous avons donc :
$t = 21/22\ t + 63/11$, soit $22/22\ t = 21/22\ t + 126/22$. D'où $t = 126$.
Le chien attrapera donc le lièvre au bout de 126 sauts.

Le Trianglor