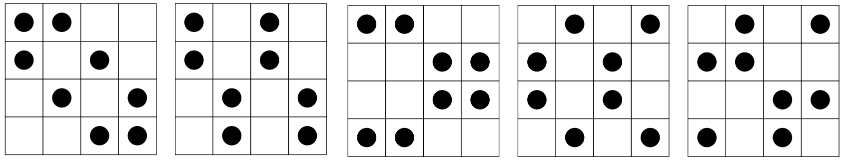
RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - 8 avril 2003

Éléments de solutions

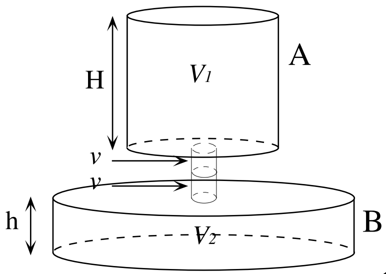
1 J'ai les jetons ! (5 points)

Une recherche de toutes les solutions peut consister à considérer toutes les dispositions possibles de deux jetons sur les deux premières colonnes. La position des autres jetons est alors unique. On trouve 5 dispositions à une isométrie près :



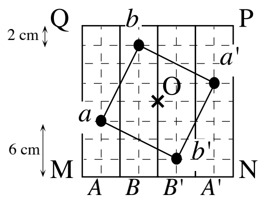
2 Un sablier bizarre (10 points)

$V_1 = \pi r^2 H$ et $V_2 = \pi 4r^2 h$. Or $V_1 + v = V_2 + v$.
Après simplification, on a $H = 4h$.
Mais $h + H + 4 = 14$. D'où $h + H = 10$.
Donc $h = 2\ cm$ et $H = 8\ cm$.



3 Réglettes trouées (10 points)

Les réglettes A et A' d'une part, et B et B' d'autre part étant identiques, le carré $aba'b'$ a comme centre de symétrie le point O lui-même centre de symétrie du carré MNPQ.
Un quadrillage de MNPQ en carrés de 2 cm de côté permet de déterminer la position des points sur les réglettes.

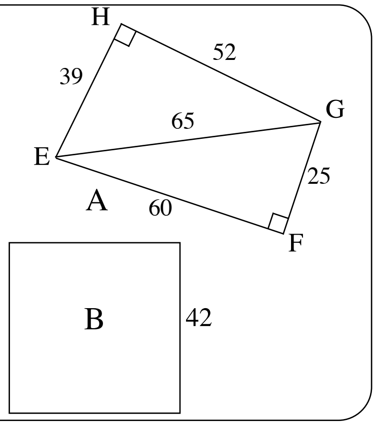


4 Même aire (10 points)

EFG étant un triangle rectangle, $EG^2 = 60^2 + 25^2 = 65^2$.
HEG étant un triangle rectangle, $EH^2 = 65^2 - 52^2 = 39^2$.

Aire (A) = $\dfrac{52x39}{2} + \dfrac{25x60}{2}$ = 1764.

Aire (B) = 1764 = 42^2.
Périmètre (A) = 39 + 52 + 25 + 60 = 176.
Périmètre (B) = 4x42 = 168.
C'est le terrain A qui a le plus grand périmètre.



8 Rectangle à périmètre variable (10 points)

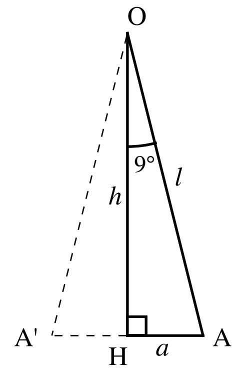
On a : 210 = 2 x 3 x 5 x 7. Les rectangles possibles sont donc : 1 x 210, 2 x 105, 3 x 70, 5 x 42, 6 x 35, 7 x 30, 10 x 21 et 14 x 15. Les périmètres respectifs sont 422, 214, 146, 94, 82, 74, 62 et 58. Le plus grand périmètre 422 est obtenu avec le rectangle 1 x 210, et le plus petit (58) est obtenu avec le rectangle 14 x 15. Six rectangles ont leur périmètre compris entre ces deux valeurs extrêmes.

9 La soirée d'anniversaire (10 points)

Serge est au piano. Ce sont donc Alain et Henri qui dansent. Les couples sont "séparés". La femme d'Alain danse donc avec Henri (mari d'Elsa) et Béa danse avec Alain (mari de Julia). Serge est donc le mari de Béa et c'est Elsa qui prépare les boissons.

10 Le moulin (10 points)

Soit OAA' une pale du moulin. Les points A et A', et les points homologues des autres pales sont ceux situés à la plus grande distance du centre O. Ce sont eux qui auront une vitesse maximum. Il faut calculer la distance OA.
L'aire d'une pale est de 2008/4 = 502 dm^2. Elle est le double de l'aire du triangle OAH. Donc $a \times h = 502$.
Dans le triangle OAH, on a : $\sin 9° = a/l$ et $\cos 9° = h/l$.
Donc $a = l \sin 9°$ et $h = l \cos 9°$. D'où $ah = l^2 \sin 9° \cos 9° = 502$.
$l^2 = 502/(\sin 9° \cos 9°) \approx 3249$. $l \approx 57$ dm.
Vitesse non demandée : $v \approx 2\pi \times 5{,}7 \times 2003/12 \approx 5978$ m/h
≈ 6 km/h

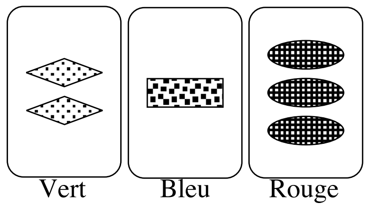


11 Set épatant (5 points)

Ces cartes, toutes différentes, se différencient par la forme des motifs, leur nombre (1, 2 ou 3) et leur couleur. Il y a donc 3 x 3 x 3 = 27 cartes différentes. On peut établir un tableau consignant ces résultats et faire le bilan des cartes données et manquantes (●).

Formes / Nombres	◇	▭	⬭
1	V R B	V R ●	V R B
2	● R B	V R B	V R B
3	V R B	V R B	V ● B

Il manque les cartes suivantes :



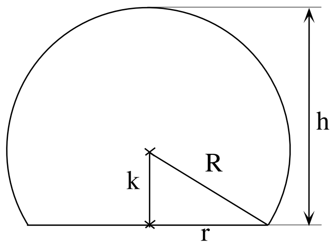
5 L'année du disque (15 points)

Soit x le prix du disque Pit Agor et y le prix du disque Archy Med.
Chez le premier disquaire on a : $32x + 27y = 2001$.
Chez le second disquaire on a : $30x + 29y = 2005$.
On en déduit que : $62x + 56y = 4006$. D'où $31x + 28y = 2003$.
Si le troisième disquaire achète 31 disques de Pit Agor et 28 disques d'Archy Med, il paiera 2003 Euros. Mais cette solution est-elle unique ?

Des équations précédentes on déduit que $y - x = 2$. On trouve ainsi $x = 33$ E et $y = 35$ E.
Peut-on avoir $x \times 33 + y \times 35 = 2003$ avec $x \neq 31$ et $y \neq 28$? Supposons que ce soit le cas. On aurait : $33(x - 31) + 35(y - 28) = 0$. Mais 33 et 35 sont premiers entre eux . Il existe donc un entier k tel que $x - 31 = 35k$ et $y - 28 = -33k$. D'où $x = 31 + 35k$ et $y = 28 - 33k$. Il faut que $x \geq 0$ et $y \geq 0$, soit $35k \geq -31$ et $33k \leq 28$. On en conclut que $-31/35 \leq k \leq 28/35$. La seule valeur entière qui convient est $k = 0$.
La solution précédente est bien la seule solution.
Remarque : on n'attendait pas des élèves qu'ils démontrent l'unicité.

6 Le planétarium (5 points)

L'aire de la base nous permet d'obtenir le rayon de cette base : $397{,}76 = (22/7)\ r^2$.
$r^2 = 126{,}56\ m^2$, d'où $r \approx 11{,}25$ m.
$k^2 = R^2 - r^2 = 14{,}1^2 - 126{,}56 = 72{,}25$. $k = 8{,}5$ m.
$h = k + R = 8{,}5 + 14{,}1 = 22{,}6$ m.
L'aire du planétarium est donc $2\pi \times 14{,}1 \times 22{,}6$.
Avec $\pi \approx 22/7$, on trouve $\mathsf{A} \approx 2003\ m^2$.



7 L'addition polyglotte (de 5 à 15 points suivant le nombre de solutions)

Voici trois solutions. Dominique Souder signale qu'il y en a 220.

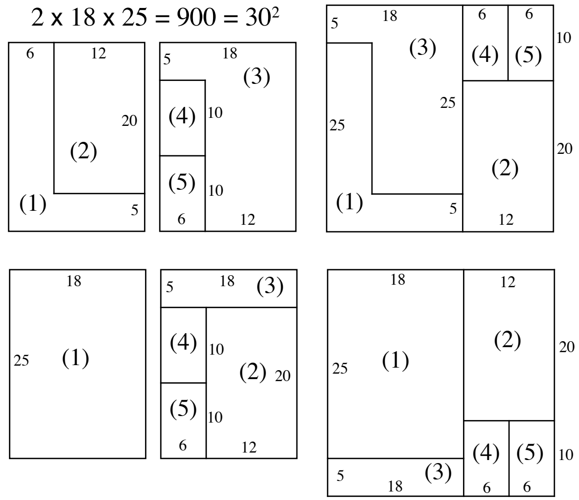
N I N E	+ T H R E E	=	N E U F	+	T R O I S		
1 7 1 2	+ 5 8 9 2 2	=	1 2 6 4	+	5 9 3 7 0	=	60 634
7 3 7 4	+ 5 1 0 4 4	=	7 4 8 2	+	5 0 9 3 6	=	58 418
3 0 3 8	+ 4 7 6 8 8	=	3 8 2 5	+	4 6 9 0 1	=	50 726

Compléments pour la classe de Seconde

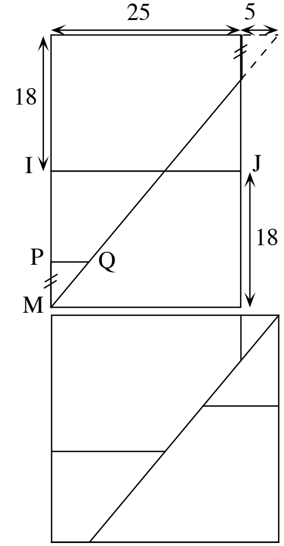
12 Trois carrés en un (15 points)

Ci-dessous, deux solutions trouvées par les élèves, et, à droite, une solution générale.

$2 \times 18 \times 25 = 900 = 30^2$



À l'aide du point N, on trace MN. On coupe suivant MQ puis PQ. IJ est déjà coupé.



13 Le défi du Prof. Ila Ransor à Léa Broutille (15 points)

Léa cherche une valeur approchée du rayon avec $\pi \approx 3{,}1416$. Elle choisit 4970 comme périmètre, Ila ransor lui suggérant que c'est une meilleure approximation. Dans ce cas :
$4970 \approx 2 \times 3{,}1416 \times R$, soit $R \approx 790{,}998$. Elle prend $R = 791$.
Alors $2 \times \frac{a}{b} \times 791 = 4972$. D'où $\frac{a}{b} = \frac{4972}{2 \times 791} = \frac{2486}{791} = \frac{22}{7}$ Fraction d'Archimède.

Et $2 \times \frac{a'}{b'} \times 791 = 4970$. D'où $\frac{a'}{b'} = \frac{4970}{2 \times 791} = \frac{2485}{791} = \frac{355}{113}$ Fraction de Metius.

Remarque :
Si on ne calcule pas le rayon R en premier, on a : $4972 = 2 \times \frac{a}{b} R$ et $4970 = 2 \times \frac{a'}{b'} R$.
$\frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'} = \frac{4972}{4970} = \frac{2 \times 11 \times 113}{5 \times 7 \times 71}$. On sait tout de même que $\frac{a}{b} = 3,\ldots$ On en déduit après examen du numérateur et du dénominateur de la fraction précédente que :

$\frac{a}{b} = \frac{22}{7}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{355}{113}$ et R = 791, ou $\frac{a}{b} = \frac{35}{11}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{226}{71}$ et R = 781. Il faut décider !

Mais $\frac{35}{11} \approx 3{,}18$ et $\frac{226}{71} \approx 3{,}18\ldots$ ce qui s'éloigne trop du nombre 3,14. On garde donc $\frac{22}{7}$ et $\frac{355}{113}$ (Ce sont des réduites de π). *On se souviendra facilement de* $\frac{355}{113}$ *qui est une excellente approximation de* π*, en écrivant 113355 !*