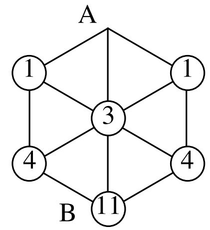
RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - 18 avril 2002

Éléments de solutions

1 La goutte d'eau (5 points)

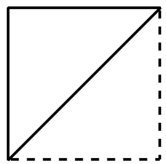


De proche en proche à partir du point A, nous avons mis à chaque nœud du réseau le nombre de chemins qui y aboutissent.
Il y a donc onze chemins possibles pour la goutte d'eau.

2 Parfait ! (10 points)

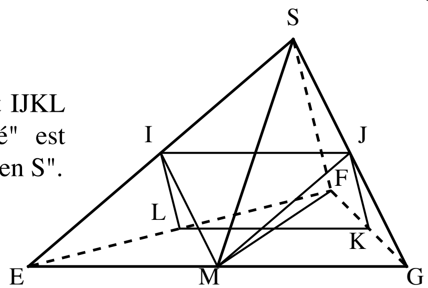
La décomposition de 2002 = 2 x 7 x 11 x 13 donne tout de suite une solution
2 + 7 + 11 + 13 = 33 ans.
Mais en faisant intervenir le facteur 1, on a 2002 = 1 x 2 x 7 x 11 x 13, et on obtient encore :
2002 = 1 x 11 x 13 x 14 = 1 x 7 x 13 x 22 = 1 x 7 x 11 x 26, les autres décompositions ne donnant pas des résultats plausibles pour la situation donnée, tant au niveau de l'âge des enfants que de celui du père.
Seule Béa Teument connaît, parmi les quatre âges possibles : 33, 39, 43 et 45, celui de Parfait Teument.

3 Le tour de champ (10 points)



Le champ a la forme d'un triangle rectangle isocèle. Le carré construit sur les côtés de l'angle droit de ce triangle a donc une aire de 64 ha, c'est-à-dire 640000 m².
Les côtés de l'angle droit du champ triangulaire mesurent donc 800 m et l'hypoténuse mesure 800 $\sqrt{2}$ m, c'est-à-dire environ 1131 m.

4 Pyramide (15 points)



Dans le tétraèdre SEFG, les quadrilatères SIMJ et IJKL sont des parallélogrammes. "SIMJ est un carré" est équivalent à "SEG est un triangle rectangle isocèle en S".

(SF) // (IL) et (IL) ⊥ (IJ) ; donc (SF) ⊥ (IJ).
(IJ) // (EG) ; donc (SF) ⊥ (EG). SEG étant un triangle rectangle isocèle, (SM) ⊥ (EG). Le plan (SMF) est donc perpe,diculaire à [EG] en son milieu M. (SMF) est le plan médiateur de [EG].
Par suite, FE = FG, et donc EFG est un triangle isocèle en F.
Restent les faces SFE et SFG qui sont deux triangles isométriques, la longueur du côté [SF] étant arbitraire, sous réserve de l'existence des triangles.

7 Petite moyenne (15 points)

Chantal a fait 455 km à une vitesse moyenne de 91 km/h. Elle a donc roulé pendant 5 heures. Les quatre premières heures, elle a fait une vitesse moyenne de 105 km/h. Elle a donc parcouru une distance de 420 km.
La dernière heure, Chantal a donc parcouru seulement 35 km.

8 Belinda et l'Euro (10 points)

7,22 F est une valeur arrondie par excès au centième près de 1,1 Euro.

$\overline{xy,xy} \approx t \times \overline{z,z}$ avec t ≈ 6,55957. $\overline{xy} \times 1{,}01 \approx z \times 1{,}1 \times 6{,}55957$.
$\overline{xy}/z \approx 7{,}144$. $\overline{xy}$ est donc voisin d'un multiple de 7. On trouve par essais successifs :
50,50 F ≈ 7,7 E, et c'est la seule solution.

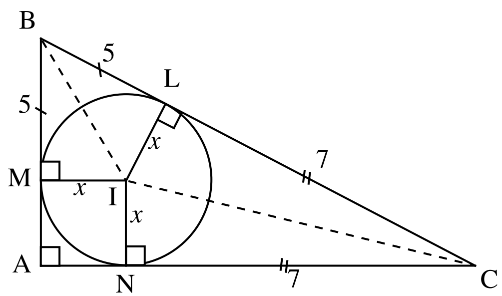
9 L'arbre de Noël (15 points)

Soit V_1 le volume d'un grand cône : $V_1 = \pi \times 6^2 \times 2x/3 = 24\pi x$.
Soit V_2 le volume d'un petit cône (partie emboîtée). Les dimensions de ce petit cône sont la moitié de celles du grand cône. Son volume est donc huit fois plus petit : $V_2 = 24\pi x/8 = 3\pi x$.
Le volume du cylindre est $V_3 = 4\pi x$. Le volume de l'arbre est donc :
$V = 4V_1 - 3V_2 + V_3 = 96\pi x - 9\pi x + 4\pi x = 91\pi x$. On a donc $91\pi x = 2002$.
En choisissant 22/7 pour π, on obtient :
$x = (2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 7)/(2 \times 7 \times 11 \times 13) = 7$ dm.
Donc la hauteur de l'arbre est $6x = 42$ dm = 4,2 m.

10 Le triangle de Poséïdon (15 points)

p $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BLIM) + \mathcal{A}(CLIN) + \mathcal{A}(AMIN) = 5x + 7x + x^2 = x^2 + 12x$. (1)

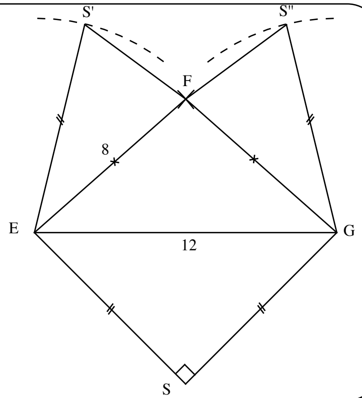
$2\mathcal{A}(ABC) = (x + 5)(x + 7)$
$= x^2 + 12x + 35$ (2)



Par soustraction (2) - (1), on obtient :
$\mathcal{A}(ABC) = 35$ m².

p La propriété de Pythagore appliquée au triangle ABC donne : $x^2 + 12x = 35$.
$2\mathcal{A}(ABC) = x^2 + 12x + 35 = 35 + 35$,
d'où le résultat.

4 Pyramide (suite)



Pour construire un patron de cette pyramide :

- Triangle ESG rectangle et isocèle en S avec EG = 12.

- Triangle EFG isocèle en F tel que FE = FG = 8.

- Triangles S'FE et S''FG tels que S'E = S''G = SE.

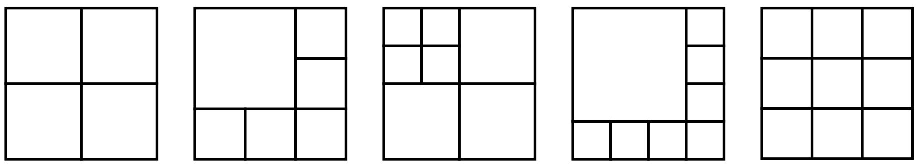
S' et S'' sont donc sur les cercles de centres E et G, de rayon SE = SG, et tels que S'F = S''G.

5 Devinez ! (5 points)

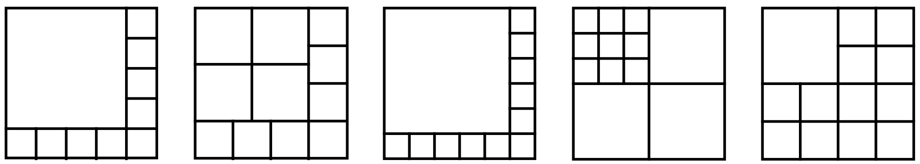
Les nombres de deux chiffres différents, inférieurs à 25 et premiers avec 9 sont : 10, 13, 14, 16, 17, 19, 20 et 23. Les palindromes correspondants sont donc :
1001, 1331, 1441, 1661, 1771, 1991, 2002 et 2332.

6 Un carré de carrés (10 points)

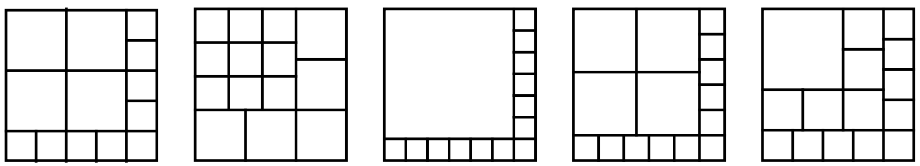
Nous donnons ci-dessous un échantillon des solutions trouvées. Un autre problème pourrait être de trouver le nombre de découpages différents, à une disposition près des carrés, pour un entier donné.



4 6 7 8 9



10 11 12 12 13



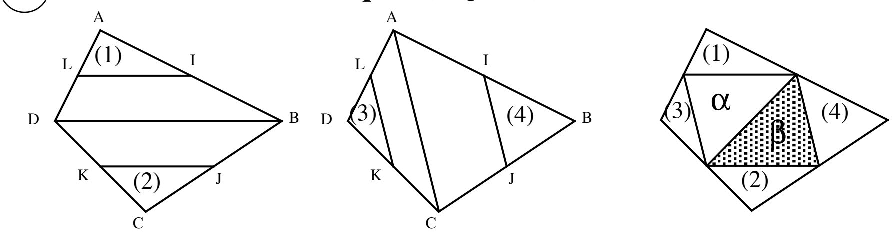
13 14 14 15 15

Compléments pour la classe de Seconde

11 Le 10-01 de 2002 (10 points)

Le premier numéro étant plus grand ou égal à 11, les départements 01, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 et 90 dont les numéros symétriques sont 10, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08 et 09 ne peuvent pas avoir de palindrome (10 départements).
Le premier numéro ne peut pas être égal au numéro du département. Les départements 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77 et 88 ne peuvent donc pas avoir de palindrome (8 départements). 95 - 18 = 77. Ainsi, seuls 77 départements peuvent avoir un numéro d'immatriculation palindrome.
Les lettres I, O et U n'étant pas utilisées, seules 23 lettres sont disponibles. Il y a donc 23 combinaisons possibles à deux lettres (AA, BB, CC…) et 23 x 23 combinaisons possibles à trois lettres AAA, BAB, CAC…) ; donc 24 x 23 combinaisons à deux ou trois lettres.
Il y a donc 23 x 24 x 77 = **42 504 numéros d'immatriculation palindromes.**

12 Le bichoco de Dominique (15 points)



p Soit A l'aire du quadrilatère ABCD. I, J, K et L étant les milieux des côtés de ABCD,
(1) = A(ALI) = 1/4 A(ABD) et (2) = A(CKJ) = 1/4 A(CBD).
(1) + (2) = 1/4 A. De même (3) + (4) = 1/4 A.
Donc (1) + (2) + (3) + (4) = 1/4 A + 1/4 A = 1/2 A. α + β = 1/2 A, et α = β.
Donc β = 1/4 A.
La masse est proportionnelle au volume (les deux chocolats sont de même densité) qui lui-même est proportionnel à l'aire de la base (la friandise a la forme d'un prisme).
La masse totale de cette friandise est donc de 60 g.

p Par glissement (affinité), les aires sont toutes conservées (conservation des longueurs ou hauteurs).
Donc A(IJK) = A (I'JK)
= 1/4 A(A'BCD)
= 1/4 A(ABCD)