RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - 5 avril 2001

Éléments de solutions

1 La tour des 4 sergents de La Rochelle (5 points)

On dénombre 21 pierres de 4 unités, soit 84 unités. Les pierres blanches occuperaient donc 12 x 12 - 84 = 60 unités avec une masse de 50 kg. Les pierres noires pèsent donc : (50 : 60) x 84 = **70 kg**.

2 2001, l'odyssée de l'espace (5 points)

En ôtant les huit sphères "sommets" et la sphère centrale, il reste 2001 - 9 = 1992 sphères à répartir sur les douze arêtes, soit 1992 : 12 = 166 sphères par arête. En ajoutant les deux sphères qui sont aux extremités des arêtes,
il y a donc 168 sphères par arête.

Autre solution : En ôtant la sphère centrale, il reste 2000 sphères à répartir sur les arêtes. Si n est le nombre de sphères par arête, on a : 12 n - 16 = 2000. Il faut en effet ôter 16 sphères, car dans 12 n, les sphères des sommets appartiennent à trois arêtes et sont donc comptées trois fois. On obtient alors directement n = 168.

3 La Sainte Irène (5 points)

S'il est évident que 2001 est divisible par 3, il est certain, d'après le texte, que 2001 a d'autres diviseurs. On trouve : 2001 = 3 x 23 x 29, ou encore 3 x 23 x 29 x 1 x 1, puisqu'il y a cinq personnes. Les parents ont donc 23 et 29 ans, l'aîné a 3 ans et les jumeaux ont 1 an.

4 Les comptes des deux mille et une nuits (10 points)

Si n est le nombre de têtes du troupeau quand Ali a été embauché, on a l'équation suivante : n - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + ... + 1998 - 1999 + 2000 - 2001 = 0.
En regroupant les termes ainsi :
n - 1 + (2 - 3)+ (4 - 5) + (6 - 7) + ... + (1998 - 1999) + (2000 - 2001) = 0
n - 1 + (-1) + (-1) + (-1) + ... + (-1) + (-1) = 0, c'est-à-dire n - 1 + 1000 x (-1) = 0.
n - 1001 = 0. D'où **n = 1001**. C'est bien un conte des Mille et une nuits !

5 Le troc de Lily (5 points)

Nous avons trouvé 7 échanges :

D + ***D***	(1) —>	D + ***2B***	D + B + A + ***G***	(5) —>	D + B + A + ***B + A***
D + B + ***B***	(2) —>	D + B + ***C + E***	2B + A + ***D + A***	(3) —>	2B + A + ***3F***
D + ***B + C + E***	(6) —>	D + ***2G***	2B + A + F + ***2F***	(4) —>	2B + A + F + ***B + C***
D + G + ***G***	(5) —>	D + G + ***B + A***	*Le deuxième échange (5) peut être fait après l'échange (3) ou après l'échange (4).*		

9 Le caprice de Marc (5 points)

Nous avons symbolisé les six places par six cases. A et B désignent les parents, X les cases des bouts de rangées que Marc ne veut pas prendre. Voici les six positions possibles pour les parents, et six autres en intervertissant A et B si on différencie les positions du père et de la mère.
M et Mme Dubois ont 12 façons de se placer.

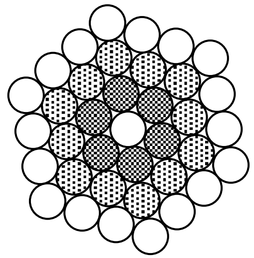
A			B		X
X	A		B		X
X	A			B	X
X		A	B		X
X		A		B	X
X		A			B

10 Curieuse Léa (5 points)

7820² - 57 100 231 = 4 052 169 = 2013² .
Donc 57 100 231 = 7820² - 2013² = (7820 + 2013)(7820 - 2013) = 9833 x 5807 .
En utilisant l'algorithme d'Euclide, on démontre que 9833 et 5807 sont premiers entre eux.

11 Der Sammler ; El coleccionista ; The coin collector (5 points)

Un collectionneur de pièces jaunes a un certain nombre de pièces de 20 centimes. Au lieu de les ranger en pile, il les étale sur une feuille. Il en place une au centre de la feuille puis 6 autres en couronne autour de la pièce centrale. Il fait une deuxième puis une troisième couronne. Il lui reste 3 pièces.
Combien en avait-il ? Combien lui en faudrait-il en plus pour faire une quatrième couronne ?



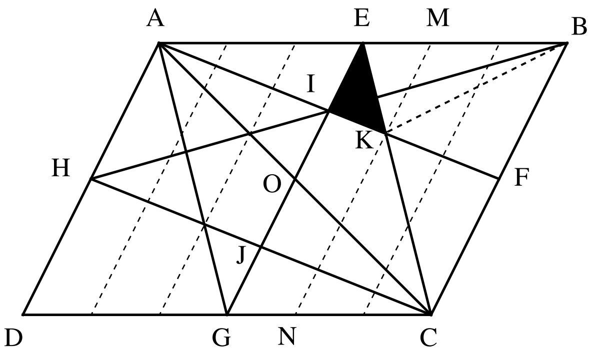
Voici les trois couronnes réalisées autour de la pièce centrale. Les nombres de pièces sont successivement
1 + 6 + 12 + 18 = 37. **Le collectionneur avait donc 40 pièces**.
Le nombre de pièce de la couronne suivante est 24. **Il lui en manque donc 21** pour réaliser cette quatrième couronne.

12 Fayçal Essiv en famille (10 points)

Soit S la somme d'argent de Fayçal.
On a : 3S/7 + nS/5 + 60 = S , c'est-à-dire : 15 S + 7n S + 2100 = 35 S.
20 S - 7n S = 2100 ; (20 - 7n) S = 2100 ; S = 2100/(20 - 7n).
20 - 7n est strictement positif. Donc n = 1 ou n = 2.
Si n = 1, 20 - 7n = 20 - 7 = 13, et 13 ne divise pas 35 x 60.
Si n = 2, 20 - 7n = 20 - 14 = 6, et 6 divise 35 x 60.
Alors, S = 2100/ 6 = 350.
Fayçal donne 350 F à ses trois enfants.

6 La planète des Jeux (10 points)

Soit a(ABCD) l'aire de ABCD.



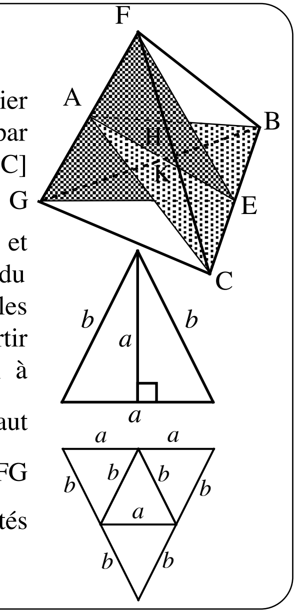
Dans le triangle ABH,
EI = 1/2 AH = 1/2 FC.
De même, KI = 1/2 KF
et KE = 1/2 KC. Donc
a(EIK) = 1/4 a(KFC)
= 1/4 x 1/2 a(KFB)
= 1/8 x 1/2 a(CBMN)
= 1/16 x 1/3 a(ABCD)

Donc a(EIK) = 1/48 a(ABCD)
Si a(ABCD) représente 12 000 habitants, a(EIK) représente 12 000/48 = 250.
Il y a donc 250 amateurs de jeux mathématiques.

7 La pastèque (5 points)

Si l'eau représente 99 % d'une pastèque de 1 kg, la matière sèche représente 1%, donc 10 g. Après exposition au soleil, l'eau ne représente plus que 98 %. Donc les 10 g de matière sèche représentent 2% de la pastèque asséchée. Et cette pastèque asséchée pèse alors 500 g.

8 Un tétraèdre (15 points)



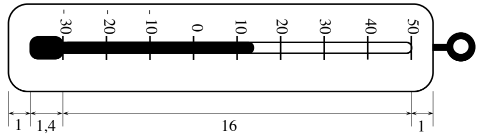
On a tracé en traits épais le tétraèdre BCGF. Il n'est pas régulier car les faces ne sont pas des triangles équilatéraux. En effet, par exemple, dans le triangle BFC, la hauteur [FE] relative à [BC] est égale à BC. Donc BF > BC.

Soit a la mesure des côtés des triangles équilatéraux ABC et EFG. FB = FC = CG = GB = b. Toutes les faces triangulaires du tétraèdre BCFG sont isométriques. Ce sont des triangles isocèles de côtés (a ; b ; b) comme le triangle ci-contre. À partir de ce triangle, nous avons dessiné en dessous un patron à l'échelle 1/2.

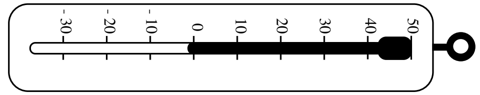
Pour que BCFG soit un tétraèdre régulier, et si BC = a, il faut que EF = $a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il faut donc que les triangles ABC et EFG soient isocèles respectivement en A et E et que leurs côtés soient (a ; $a\frac{\sqrt{3}}{2}$; $a\frac{\sqrt{3}}{2}$).

13 Chaud et froid (10 points)

La température est la même quand le mercure est à la moitié du tube entier (colonne et réservoir), soit à (16 + 1,4)/2 cm, donc à 8,7 cm des extrémités du tube.
Or 16 cm correspond à 80°. Donc 1 cm correspond à 5°.
La température cherchée est donc à une "distance" de 5 x 8,7 = 43,5° du haut du tube, soit 50° - 43,5° = **6,5° .**



Dessin 1 : thermomètre avant transformation



Dessin 2 : thermomètre après transformation

Compléments pour la classe de Seconde

14 Ludomaniaques à tout âge... (10 points)

Soit L, C et E les nombres respectifs de lycéens, collégiens et écoliers.
On a 100L + 20C + 5E = 2000 donc 20L + 4C + E = 400 (1) et L + C + E = 100 (2) .
En soustrayant membre à membre les équations (1) et (2), on obtient 19 L + 3C = 300, soit 19 L = 3x (100 - C) . 19 n'étant pas un multiple de 3, L en est obligatoirement un, et on a C = 100 - 19L/3. De cette relation et de l'équation (2) on peut construire le tableau suivant en prenant pour L les multiples successifs de 3 strictement inférieurs à 18.

L	0	3	6	9	12	15
C	100	81	62	43	24	5
E	0	16	32	48	64	80

La première colonne ne convenant pas, il y a donc les cinq autres répartitions données par le tableau.

15 Nicolas le jardinier (15 points)

L'aire de IJKL est la moitié de l'aire de ABCD. Donc
AB x BC / 2 = l x L /2 = 50, et donc l x L = 100
Par ailleurs, ABC est un triangle rectangle. D'après la propriété de Pythagore, on a $l^2 + L^2 = 20^2$. On obtient donc les deux équations l x L = 100 et $l^2 + L^2 = 400$.
D'où $L^2 + 2 \times L \times l + l^2 = (L + l)^2 = 600$
et $L^2 - 2 \times L \times l + l^2 = (L - l)^2 = 200$
On en déduit que $L + l = 10\sqrt{6}$ et que $L - l = 10\sqrt{2}$
D'où $2l = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, c'est-à-dire $\boxed{l = 5(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$