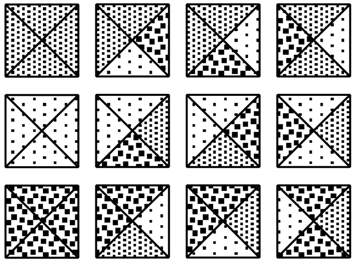
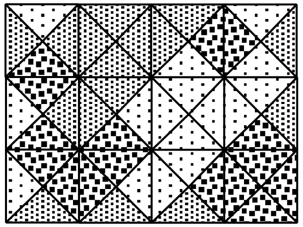
RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - 27 avril 2000

Éléments de solutions

1 Anti Bicolore. (10 points)

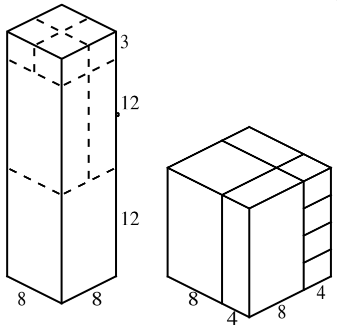
Voici les 12 pièces monocolores ou tricolores, dans un classement logique, et un pavage rectangulaire de 3 sur 4 qui respecte la règle de juxtaposition.

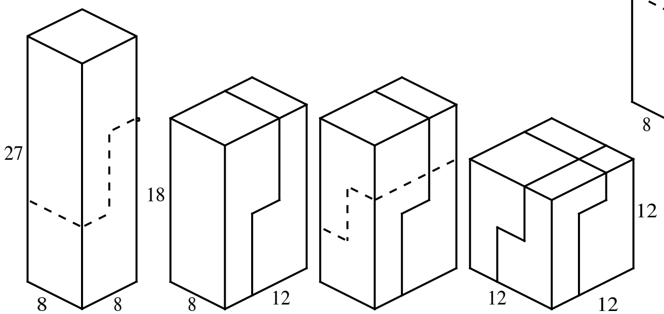




2 Mise en boîte. (10 points)

Voici, ci-contre, un découpage en 7 morceaux.
Mais ce n'est pas le découpage minimum.
Vous avez, ci-dessous, un découpage en 4 morceaux.

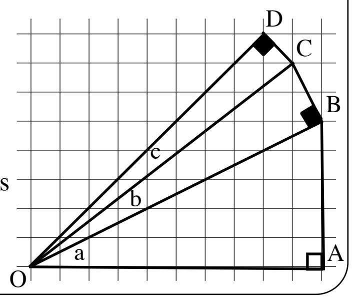




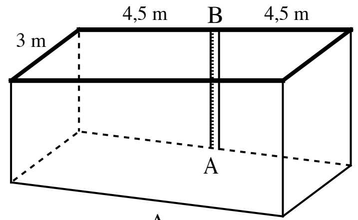
3 Lettre de Léa Broutille à son cousin Ila Ransor. (15 points)

OAB est un triangle rectangle en A. À l'aide des coordonnées des points on peut calculer facilement : OB = $5\sqrt{5}$, BC = $\sqrt{5}$, OC = $\sqrt{130}$, CD = $\sqrt{2}$ et OD = $8\sqrt{2}$, et démontrer par la propriété de Pythagore que les triangles OBC et OCD sont rectangles en B et D.

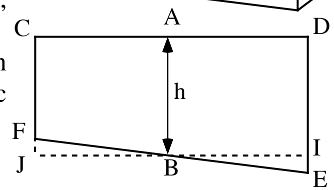
On peut alors utiliser les fonctions trigonométriques dans ces triangles : tan a° = 5/10 = 1/2, tan b° = $\sqrt{5}$ / $5\sqrt{5}$ = 1/5 et tan c° = $\sqrt{2}$ / $8\sqrt{2}$ = 1/8, avec a° + b° + c° = 45°.



8 Die Messlatte im Swimming-pool.
La regla en la piscina
The ruler in the swimming pool.
La règle dans la piscine.



La piscine est remplie en 3 jours moins 12 heures, donc en 60 heures.
Un débit de 1,5 L en 6 s correspond à 15 L en 1 min et donc à 900 L en 1 h. La piscine contient donc 900 x 60 = 54 000 L d'eau.
Son volume est de 54 m^3.



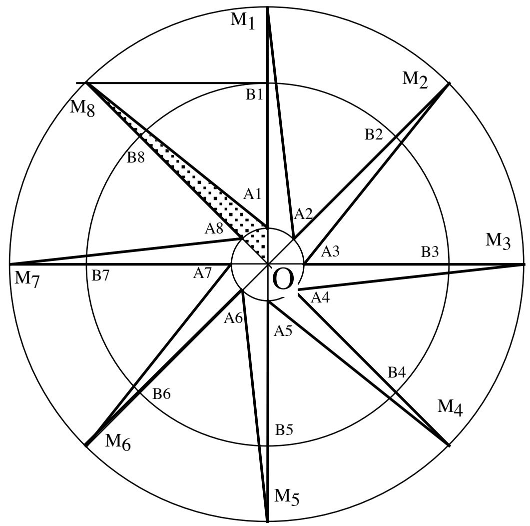
L'aire de la base trapézoïdale CDEF du prisme est la même que celle du rectangle CDIJ dont la longueur des côtés CJ et DI est égale à la demi somme des bases du trapèze, c'est-à-dire à la longueur de la règle AB.
L'aire de la face horizontale est de 3 m x 9 m = 27 m^2.
La hauteur de la règle est donc de 54m^3/27m^2 = 2 m.

9 Année 2000. (5 points)

On remarque que 2000 = 2 x 1000 = 2 x 10 x 10 x 10 = 2 x 2 x 5 x 2 x 5 x 2 x 5.
Donc 2000 = 1 x 2^4 x 5^3 ou **1 x 4^2 x 5^3.**

10 Étoile 2000. (15 points)

Le triangle OB_1M_8 est rectangle - isocèle en B_1.
Donc $\widehat{B_1OM_8} = \widehat{B_1M_8O} = 45°$,
et $\widehat{M_8B_1O} = 90°$.
De plus $M_8B_1 = B_1O = 50$ mm.
Aire du triangle OA_1M_8 :
Dans ce triangle, M_8B_1 est la hauteur associée à la base OA_1.
Donc $\mathcal{A}(OA_1M_8) = OA_1 \times M_8B_1/2$
$= 10 \times 50 / 2$
L'aire totale de l'étoile est donc :
8 x 10 x 50 / 2 = 2000 mm^2



4 Les CD chez Georges. (5 points)

Soit a, b, c et d les nombres de CD apportés par André, Bernard, Claude et Daniel.
André, Bernard, Claude et Daniel ont apporté au total 15 CD ; donc $a + b + c + d = 15$ [1].
André et Claude en ont apporté 6 à eux deux ; donc $a + c = 6$ [2].
Claude et Daniel en ont apporté 7 à eux deux ; donc $c + d = 7$ [3].
De (1) et (3) on déduit que $a + b = 8$ [4]. Chacun a apporté au moins deux CD, donc $2 \leq a$ et, d'après [2], $a \leq 4$. Donc $2 \leq a \leq 4$. Mais personne n'en a apporté le même nombre ; donc $a \neq 3$ d'apès [2] et $a \neq 4$ d'après [4]. Il s'ensuit $a = 2$; d'où $b = 5$, $c = 4$ et $d = 3$.
C'est donc Claude qui a apporté 4 CD.

5 Sur la planète Heptilon. (5 points)

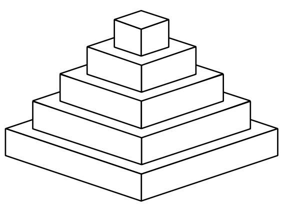
Le nombre1111 correspond dans notre système décimal à :
$1 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 1 \times 7 + 1 = 1 \times 343 + 1 \times 49 + 1 \times 7 + 1 = 343 + 49 + 7 + 1 = 400$.
Le nombre $2222 = 2 \times 1111$; il correspond donc à $2 \times 400 = 800$.
Le nombre $3333 = 3 \times 1111$; il correspond donc à $3 \times 400 = 1200$.
Les années heptiloniennes 1111, 2222 et 3333 correspondent donc aux années terriennes 400, 800 et 1200.
$2000 = 5 \times 400$. Donc le nombre 2000 correspond à $5 \times 1111 = 5555$ en heptilonien.
L'année terrienne 2000 est donc l'année heptilonienne 5555.
Remarque : on peut obtenir le résultat par divisions successives par 7 :
$2000 = 7 \times 285 + \mathbf{5}$; $285 = 7 \times 40 + \mathbf{5}$ et $40 = 7 \times \mathbf{5} + \mathbf{5}$, d'où la réponse.

6 La montre du père Léon (10 points)

La montre du père Léon sera à nouveau à l'heure lorsqu'elle retardera exactement de 12 heures, soit 720 minutes. Sachant qu'elle retarde de 2 minutes par jour, elle redonnera l'heure exacte à la fin du 360ème jour de cette année. L'année 2000 est bissextile ; elle comporte donc 366 jours, et le 360ème jour est le jour de Noël.
La montre du père Léon donnera à nouveau l'heure exacte le jour de Noël à minuit, ou le 26 décembre à 0 heure.
Le père Léon et le père Noël n'ont donc pas distribué leurs cadeaux à la même heure.

7 Pyramide 2000. (5 points)

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 17^2 + 18^2 = 2109$
Pour obtenir 2000, il faut donc ôter 109 cm^3, et la seule façon est d'enlever la plaque de côté 10 et celle de côté 3.
La hauteur de la pyramide est alors de 18 - 2 = 16 cm.



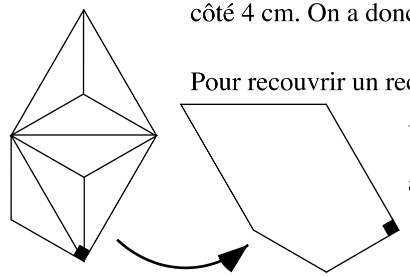
Compléments pour la classe de Seconde

11 La famille Septime. (10 points)

Puisque les parents ont eu sept enfants en six ans, c'est qu'il y a eu des jumeaux. Puisqu'il y a deux gâteaux de plus qu'il y a deux ans, c'est qu'il y a deux ans le plus jeune enfant n'était pas né, l'avant dernier venait juste de naître, et les jumeaux étaient déjà nés. Actuellement, le plus jeune a donc 1 an, et les jumeaux ont x ans, avec $x \geq 3$. On a donc : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + x = 2 (1 + 2 + 3 + 4 + x - 2)$.
D'où $x + 21 = 16 + x$, et donc $x = 5$.
Il faudra donc allumer $1 + 2 + 3 + 4 + 2 \times 5 + 6 = 26$ bougies.

12 Pavage

Ce motif a une aire égale aux 7/3 de l'aire du triangle équilatéral de côté 4 cm. On a donc : $\frac{7}{3} \times 4 \times 4\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 28\frac{\sqrt{3}}{3}$



Pour recouvrir un rectangle de $16 \times 28\frac{\sqrt{3}}{3}$, il faut donc 16 pavés.

Voici, ci-dessous, un pavage du rectangle avec les découpages nécessaires de carreaux.