

# RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU - CHARENTES - 27 AVRIL 2000

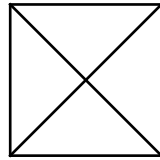
## 1 Anti Bicolore. (10 points)

Pour carreler sa piscine, André utilise des carreaux comme celui de la figure ci-contre.

Ces carreaux peuvent avoir jusqu'à 3 couleurs (rouge, vert, jaune), chacune des quatre parties pouvant être de l'une ou l'autre des 3 couleurs. Mais André refuse catégoriquement les carreaux bicolores (ceux qui ne comportent que deux couleurs).

Combien y a-t-il de carreaux différents ? Dessine-les.

Avec tous ces carreaux, réalise un motif rectangulaire de telle sorte que les bords de deux carreaux accolés soient de la même couleur ?

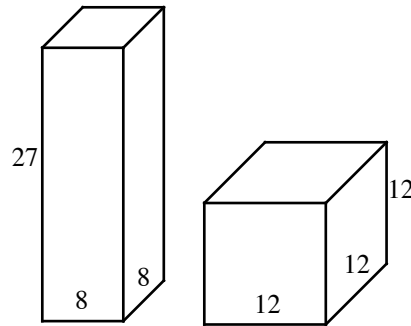


## 2 Mise en boîte. (10 points)

Une pièce de bois parallélépipédique de dimensions 8 cm, 8 cm, 27 cm a le même volume qu'un cube d'arêtes 12 cm.

Découper cette pièce de bois en un nombre minimum de morceaux pour remplir une boîte cubique d'arête intérieure 12 cm.

Indiquer le découpage de la pièce de bois et la disposition des morceaux dans la boîte.



## 3 Lettre de Léa Broutille à son cousin Ila Ransor. (15 points)

*Cher cousin,*

*J'ai lu dans un petit livre d'amusements mathématiques\* ("amusement", tu parles !) que l'angle de  $45^\circ$  est la somme des trois angles  $a^\circ$ ,  $b^\circ$  et  $c^\circ$  tels que  $\tan a^\circ = 1/2$ ,  $\tan b^\circ = 1/5$  et  $\tan c^\circ = 1/8$ . En as-tu une démonstration simple ?*

*Les mathématiques me laissent toujours un peu perplexe !*

*\*  $\pi$ , Le petit Archimède - Mai 1980.*

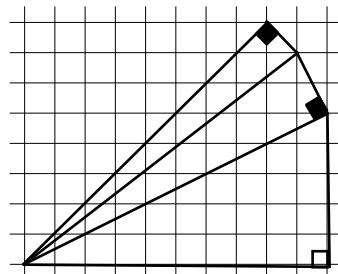
Réponse du prof. Ila Ransor

*Chère Cousine,*

*Je veux ménager tes méninges. Je t'envoie un petit croquis sur lequel tu devras trouver les angles  $a^\circ$ ,  $b^\circ$ ,  $c^\circ$  et  $45^\circ$ . Tu démontreras bien sûr que les angles cochés par "■" sont droits.*

Ila

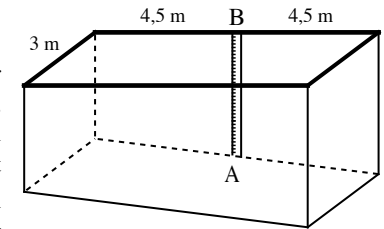
Ménagez les méninges de la Cousine et faites ce qui lui est demandé.



## 8 (15 points)

### Die Messlatte im Swimming-pool.

Der berühmte Herr Professor Vincent Tibia hat in seiner Villa "Tu lo sabes" einen Swimming-pool bauen lassen, deren Form hier nebenstehend angegeben ist (ein rechteckiger Umfang von 9 m mal 3 m). Der Grund ist eine regelmäßige schiefe Ebene. Um zu wissen, wie hoch das Wasser ist, hat er eine Messlatte senkrecht in der Mitte einer Längsseite hingestellt (siehe Figur).



Da er auf ein wirksames Bewässerungssystem noch warten muß, hat er vorläufig nur einen Schlauch, der an einen Wasserhahn angeschlossen ist. Dieser Wasserhahn füllt eine Wasserflasche (1,5 L) in 6 Sekunden. Vincent sagt seiner Tochter : "Das wird lange dauern, bis der Swimming-pool voll sein wird. Wir müssen den Wasserhahn drei Tage lang laufen lassen. Stell dir das mal vor !". Von dieser Art von Problem sehr motiviert antwortet sie ihm sogleich : "Aber, nein, Vati, sonst würde der Swimming-pool ja 12 Stunden lang überlaufen und wir würden viel Wasser vergeuden."

Ach, ja, was ist die Höhe AB der Messlatte ?

### La regla en la piscina

El famoso profesor Vicente TIBIA ha hecho construir en su casa "Tú lo sabes" una piscina cuya forma aparece aquí (perímetro rectangular de 9 m sobre 3 m) con un fondo en inclinación regular. Para darse cuenta del nivel de agua ha colocado verticalmente una gran regla graduada en el medio de una longitud (véase la figura).

Antes de tener un sistema eficaz de alimentación de agua, sólo dispone de una manga conectada con un grifo. Este grifo llena una botella de agua (1,5 l) en 6 segundos. Vicente le dice a su hija : "Se tardará mucho para llenar esta piscina. ¡ Habrá que dejar este grifo abierto durante 3 días ! ¿ Te das cuenta ? ". Muy interesada por este tipo de problema, ella le contesta en seguida : "No, papá, la piscina se desbordaría durante 12 horas y perderíamos mucha agua.

Bueno, ¿ Cuál es la altura AB de la regla ?

### The ruler in the swimming pool.

The famous professor Vincent Tibia has had a swimming pool built in his villa "Tu lo sabes". Its shape is as follows : a 9 x 3 m perimeter and a steadily sloping bottom.

In order to check the depth of the water, he has fixed a long graduated ruler in the middle of one length.

As he does not have yet any efficient water-supplying system, he uses a hosepipe connected to a tap. This tape can fill up a 1,5 litre bottle in 6 seconds.

Vincent says to his daughter : "It is going to take a long time to fill up the pool ; we will have to let the tap on for three days ! Can you imagine ?"

As she is very interested in this kind of problem, she replies at once : " Not at all, Daddy !, or else, the pool would be overflowing for 12 hours ! This would waste a lot of water ! "

By the way, what is the length AB of the ruler ?

4 **Les CD chez Georges.** (5 points)

André, Bernard, Claude et Daniel ont apporté au total 15 CD pour la boum de Georges. André et Claude en ont apporté 6 à eux deux, Claude et Daniel 7 à eux deux. Chacun a apporté au moins deux CD, et personne n'en a apporté le même nombre. **Qui a apporté 4 CD ?**

5 **Sur la planète Heptilon.** (5 points)

Au lieu d'utiliser le système décimal (base dix), les habitants de la planète Heptilon compte en base sept. Pour cela, ils utilisent les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 importés de la planète Terre.

Ainsi, le nombre heptilonien 2352 (prononcer "deux, trois, cinq, deux") correspond au nombre terrien 870 (huit cent soixante dix, en français !). En effet, 2352 signifie en système décimal :  $2 \times 7^3 + 3 \times 7^2 + 5 \times 7 + 2 = 2 \times 343 + 3 \times 49 + 5 \times 7 + 2 = 686 + 147 + 35 + 2 = 870$ .

À quelles années terriennes correspondent les trois années heptiloniennes 1111, 2222 et 3333 ?  
À quelle année heptilonienne correspond notre année 2000 ?

6 **La montre du père Léon** (10 points)

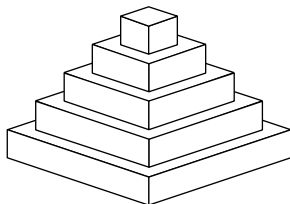
Le père Léon a une vieille montre à aiguilles qui retarde de 2 minutes par jour. Il la met à l'heure une fois par an, au 1er janvier à 0 h, et la remonte régulièrement pour qu'elle ne s'arrête pas.

Quel jour, après le premier janvier de cette année, la montre donnera-t-elle pour la première fois l'heure exacte, et quelle est cette heure ?



7 **Pyramide 2000.** (5 points)

À l'occasion de l'année mondiale des mathématiques, James a l'idée de réaliser une structure pyramidale en disposant les unes sur les autres, comme le montre le dessin ci-contre, des plaques carrées de 1 cm de haut, et dont les côtés mesurent successivement : 1 cm, 2 cm, 3 cm, et ainsi de suite, jusqu'à atteindre  $2000 \text{ cm}^3$ .



En étudiant l'empilement de ces plaques, il se rend compte que, de cette façon, il ne peut pas obtenir exactement  $2000 \text{ cm}^3$ , sauf s'il retire deux des plaques qu'il avait posées.

Quelles sont ces deux plaques et quelle est la hauteur de sa structure ?

9 **Année 2000.** (5 points)

On peut écrire 2000 en utilisant une et une seule fois les nombres 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5. Étonnant, non ? Trouverez-vous ? Vous pouvez utiliser toute opération connue.

10 **Étoile 2000.** (15 points)

L'entreprise "Étoile 2000" spécialisée dans la vente de télescopes a fait appel au mathématicien Jeff Aifor pour que celui-ci crée un logo pour l'entreprise. Voici ce que Jeff a proposé :

- Il a tracé un cercle de centre O et de rayon 10 mm dans lequel il a inscrit un octogone régulier  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$  en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.
  - Il a ensuite tracé un cercle de même centre O et de rayon 50 mm. À l'intersection de la demi-droite  $[OA_1]$  et de ce 2<sup>ème</sup> cercle, il a placé le point  $B_1$  puis construit le triangle  $OB_1M_8$  isocèle en  $B_1, M_8$  étant sur la demi-droite  $[OA_8]$ .
  - Il a enfin tracé un troisième cercle de rayon  $OM_8$  dans lequel il a inscrit en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, un octogone régulier  $M_8, M_1, M_2, \dots, M_7$ .
- Faites la figure puis reliez les points  $M_1, A_1, M_8, A_8, M_7, \dots$  et ainsi de suite jusqu'à  $M_2, A_2$  et  $M_1$  pour obtenir le logo de Jeff.
- Mais au fait, quelle est l'aire exacte de ce logo en  $\text{mm}^2$  ?

## Supplément pour la classe de Seconde

11 **La famille Septime.** (10 points)

Monsieur et Madame Septime ont eu sept enfants nés tous les sept le 1<sup>er</sup> avril, en fait six 1<sup>er</sup> avril consécutifs.

Cette année, pour leur anniversaire, Madame Septime leur offre à chacun un petit gâteau comportant autant de bougies qu'ils ont d'années. Jean Septime, le plus doué en math constate qu'il y a deux fois plus de bougies qu'il y a deux ans et deux gâteaux en plus.

Combien de bougies Madame Septime doit-elle allumer cette année ?

12 **Pavage.** (15 points)

Un pavé a la forme ci-contre. Les dimensions sont données sur le dessin (fait ici à l'échelle 1/2).

- \* Calculez la valeur exacte de son aire.
- \* Combien faut-il au minimum de tels pavés pour recouvrir un rectangle de 16 sur 28  $3\sqrt{3}$ . Comme dans tout carrelage d'une pièce, on est amené à découper un nombre minimum de pavés sur le pourtour, et on réutilise les chutes.
- \* Faire un dessin représentant la disposition des pavés.

