RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES 1999 - Éléments de solutions

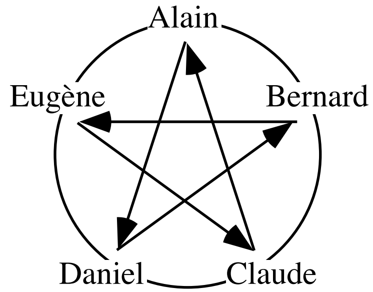
1 Un peu plié ! (5 points)

Les plis proposés donnaient un pliage unique, ce qui n'est pas toujours le cas.
Les deux lettres restant apparentes étaient D et J.

2 Parents d'élèves. (10 points)

A a voté pour .... qui a voté pour B, le voisin de gauche d'Alain. On écrit pour simplifier : A…B. On aura de même : B…C, C…D, D…E et E…A.
Si on "condense" ces "expressions", on a : A…B…C…D…E…A.
On coupe l 'expression précédente en deux parties : A…B…C… et D…E…A.

On déplace la seconde vers la première de façon à ce que les lettres D, E et A et les lettres B et C viennent occuper la place des pointillés. On aboutit ainsi à la nouvelle expression A D B E C A, qui indique les votes : **A a voté pour D, D pour B, B pour E, E pour C et C pour A**.
Remarque : avec un nombre impair de votants et les mêmes caractéristiques de vote, la méthode ci-dessus s'applique.



3 La comptine. (15 points)

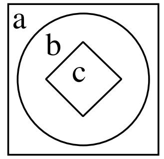
Laurent commence sa comptine par le camarade situé à sa droite et veut éliminer le camarade situé à sa gauche. S'il y a n camarades en jeu : en k tours avec une comptine de k x n syllabes, il arriverait à lui-même ; avec une comptine de k x n - 1, par contre, il arrivera au camarade sur sa gauche et ainsi l'éliminera.
Donc, le nombre de syllabes sera de la forme K - 1, K étant un multiple de 6, de 5, de 4, de 3 et de 2, puisqu'il y aura successivement en jeu 6, 5, 4, 3 et 2 camarades (Laurent compris). Le plus petit multiple de ces cinq nombres étant 60, la plus petite valeur possible de K est alors 60 et **le nombre de syllabes de la comptine est 59**.
Remarque : Laurent peut obtenir le même résultat en enlevant la contrainte : "*éliminer son camarade de gauche*", mais plus rapidement !, avec une comptine de 7 syllabes, en commençant toujours par le camarade situé à sa droite, (respectivement à sa gauche).

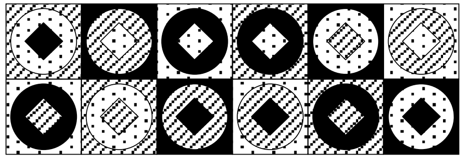
7 Sécurité. (5 points)

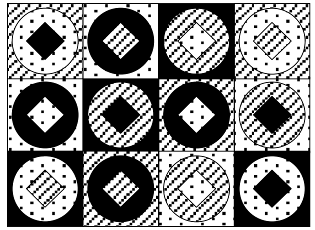
Le reste de la division du nombre de la carte de Germaine par 97 étant 11, la clé est égale à 97 - 11 = 86.
Le nombre N de la carte d'Edgar sera de la forme 1 46 08 79 191 07X. Il commence en effet par 1 (codage pour les hommes) et finit par un treizième chiffre X que l'on doit déterminer. La clé du numéro étant 71 le reste de la division de N par 97 sera nécessairement 26 [97 - 26 = 71]. La division du nombre 146087919107 par 97 étant 70, le reste de la division de 70X par 97 doit être 26. Par suite, le chiffre X est un 5.
Le numéro de sécurité sociale cherché est donc 1 46 08 79 191 075.

6 Patchwork. (10 points)

Il y a 3 couleurs possibles pour la zone a ; Il n'y en a plus que 2 pour la zone b et encore 2 pour la zone c. Il y a donc 3x2x2 = 12 carrés de tissu différents. On peut donc les disposer suivant un rectangle de 3x4 ou 2x6. Pour que deux zones adjacentes ne soient pas de la même couleur, 3 étant premier avec 2 et 4, il suffit de disposer les carrés en permuttant régulièrement les trois couleurs de fond sur les bandes de longueur 4 ou 2, comme le montrent les deux exemples suivants.







8 Un nombre remarquable ? (10 points)

Le nombre n est soit pair soit impair ; on ne peut le savoir à priori !
Si le nombre n est pair alors il est de la forme n = 2m . Sa moitié est m et le nombre entier précédant m est m - 1. On a alors, d'après l'énoncé, 2 m - 1000 = m - 1.
D'où m = 999 et, dans ce cas, n = 1998.
Si le nombre n est impair, il est alors de la forme 2m + 1. Sa moitié est m + 1/2 et le nombre entier précédent est m. Ainsi d'après l'énoncé, 2m + 1 - 1000 = m.
D'où m = 999 et, dans ce cas, n = 1999.
Lequel des deux nombres est le plus remarquable ? 1998 ou 1999 ?

9 Puzzle. (15 points)

Voici la disposition des pièces : un triangle équilatéral, un rectangle (non demandé) et le carré. La construction et la démonstration de l'égalité des aires seront données dans le Corol'aire n° 37 qui paraîtra en juin prochain.

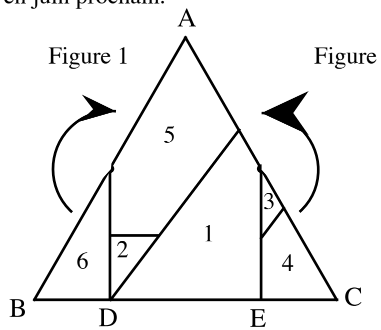


Figure 1

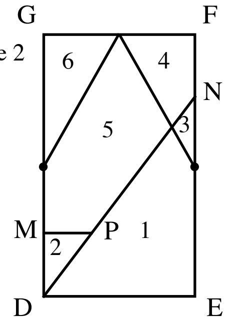


Figure 2

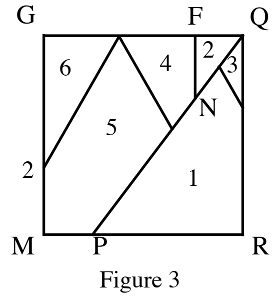
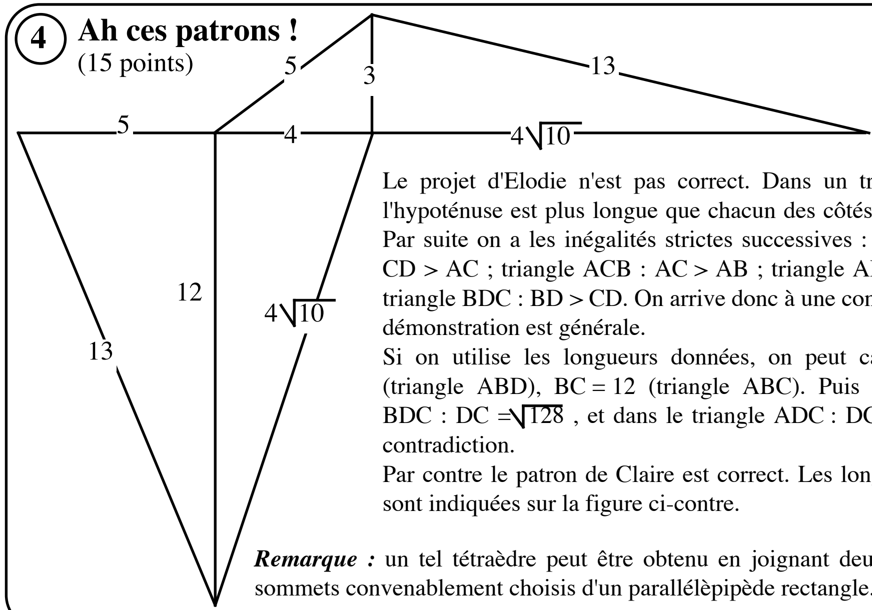


Figure 3

4 Ah ces patrons ! (15 points)



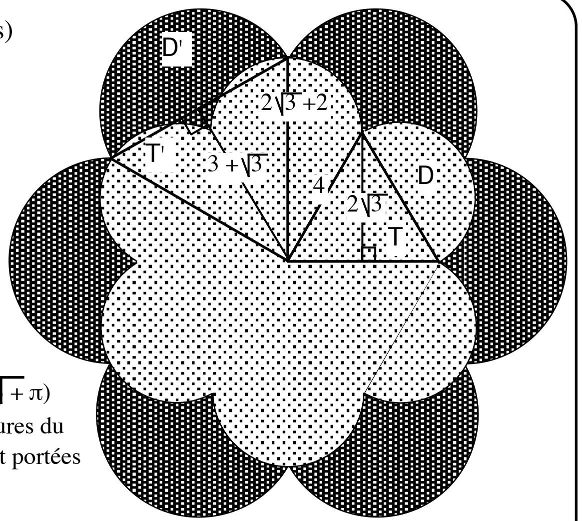
Le projet d'Elodie n'est pas correct. Dans un triangle rectangle l'hypoténuse est plus longue que chacun des côtés de l'angle droit. Par suite on a les inégalités strictes successives : triangle ADC : CD > AC ; triangle ACB : AC > AB ; triangle ABD : AB > BD ; triangle BDC : BD > CD. On arrive donc à une contradiction. Cette démonstration est générale.

Si on utilise les longueurs données, on peut calculer AB = 5 (triangle ABD), BC = 12 (triangle ABC). Puis dans le triangle BDC : DC = $\sqrt{128}$, et dans le triangle ADC : DC = $\sqrt{160}$. D'où la contradiction.

Par contre le patron de Claire est correct. Les longueurs des côtés sont indiquées sur la figure ci-contre.

Remarque : un tel tétraèdre peut être obtenu en joignant deux à deux quatre sommets convenablement choisis d'un parallélèpipède rectangle.

5 Mathieu et Mathias. (15 points)



Voici la fleur très Math(ématique) de Math(ieu) et de Math(ias). La partie rouge (cœur et pétale) est composée de six triangles équilatéraux T et de six demi-disques D. La surface totale (rouge et verte) est elle-même composée de six triangles équilatéraux T' et de six demi-disques D'. Il suffit donc de calculer l'aire de chacun de ces éléments de base B et B'. L'aire verte sera obtenue par différence de ces deux aires.

1ère méthode : $B = T + D = 4\sqrt{3} + 2\pi = 2(2\sqrt{3} + \pi)$

On calcule B' comme précédemment. Les mesures du côté et de la hauteur du triangle équilatéral sont portées sur le dessin.

2ème méthode :

On peut remarquer qu'on obtient B' en multipliant les dimensions de B par $k = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

On obtient donc B' à partir de B en multipliant par $k^2 = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a donc $B' = B\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = B + B\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $B' - B = B\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

L'aire verte est donc plus petite que l'aire rouge.

L'aire rouge est $12(2\sqrt{3} + \pi)$. L'aire verte est $12(2\sqrt{3} + \pi)\frac{\sqrt{3}}{2} = 6(6 + \pi\sqrt{3})$

10 vacances en famille (10 points)

	Prénoms	Lieu d'habitation	Lieu de vacances
Family holidays.	Edward, Louise	London	Brighton
	Donald, Dorothy	//	Italy
	Andrew, Mary	//	Australia
Familien in Ferien.	Günter, Franziska	Berlin	Hambourg
	Dieter, Doris	//	Italien
	Anton, Marie	//	Australien
Vacaciones en familia.	Gustav, Paquita	Murcia	Almeria
	Domingo, Dolorés	//	Italia
	Andrés, María	//	Australia

Compléments pour la classe de Seconde

11 MathAS. (10 points)

Soit n le nombre des candidats de chacun des trois lycées. Le tableau ci-dessous permet de résoudre le problème :

	Lycée Ramic	Lycée Mafor	Lycée Lulose	autres établissements
Candidats	n	n	n	2 085 - 3n
Réussite	65 %	30 %	40 %	8 %
Reçus (300)	0,65 n	0,30 n	0,40 n	0,08 (2 085 - 3n)
soit (n = 120)*	78	36	48	138

* Calcul de n : le total des reçus étant 300,
on a : 0,65 n + 0,30 n + 0,40 n + 0,08 (2085 - 3n) = 300.

12 Cochons vendus. (15 points)

Soit n le nombre de cochons à vendre. Appelons A(p) le nombre de cochons vendus au p-ième client et R(p) le nombre de cochons restant après cette p-ième vente.

On aura R(0) = n (par convention) et R(5) = 0 (la vente est terminée au cinquième client).

A(p) = R(p-1) / 2 + p et R(p) = R(p-1)/2 - p .

On a successivement : R(0) = n ; R(1) = n/2 -1 ; R(2) = n/4 - 5/2 ; R(3) = n/8 - 17/4 ; R(4) = n/16 - 49/8 ; R(5) = n/32 - 129/16.

Comme R(5) = 0, n = 258. Les ventes successives sont : 130, 66, 34, 18 et 10.