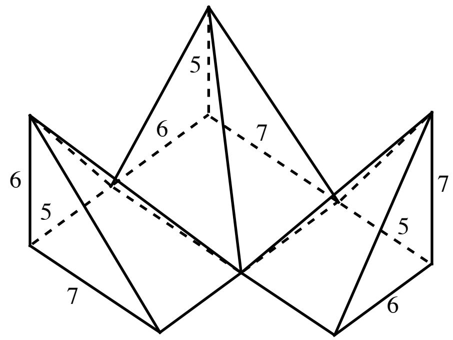
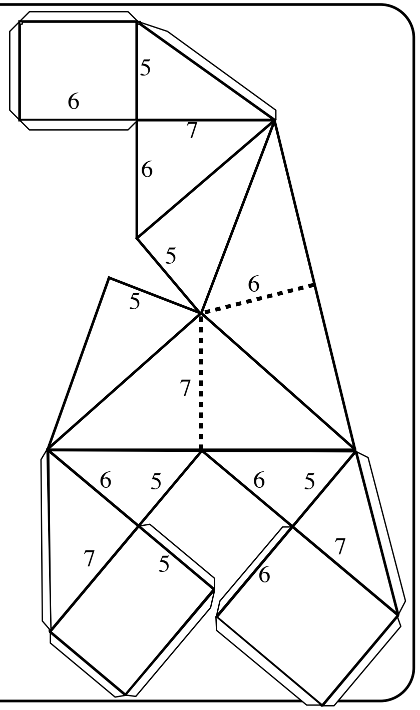
RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES 1998 - Éléments de solutions

1 Le mystère des trois pyramides. (15 points)

Les élèves pouvaient utiliser le dessin en perspective et le patron du cube pour les adapter au parallélépipède comme nous le faisons ici, en mettant les cotes sur les arêtes du dessin en perspective, et les faire correspondre au patron. Le découpage du patron proposé pour la constitution des trois pyramides était aussi une aide précieuse pour la réussite de ce problème.

En pointillés, la séparation des 3 patrons des pyramides.





2 Dans la galaxie ZZ 7/77. (5 points)

Numérotons (1), (2), (3), (4) et (5) les affirmations dans l'ordre où elles apparaissent dans le texte, et désignons les prénoms par leurs initiales.

Considérons les affirmations dans l'ordre suivant (1), (4), (2), (5), (3) et supposons que A est Zado. D'après (1), B est Zado ; donc, d'après (4) C est Zadult et d'après (2) D est Zado ; donc d'après (5) E est Zadult et ainsi d'après (3) A est Zadult, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse.

Donc A est Zadult, B est Zadult (1), C est Zado (4), D est Zadult (2), E est Zadult (5) et la proposition (3) n'est pas contradictoire avec notre hypothèse.

Il y a donc un seul Zado (Christophe) parmi les cinq.

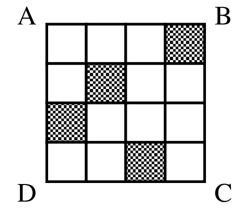
3 Un gros cube, un p'tit cube, c'est l'heure... (10 points) [2 solutions]

1) Soit a l'arête d'un petit cube. Le nombre n de petits cubes en hauteur est un diviseur de 30. Donc nxa = 30. On obtient ainsi les possibilités : 30 x 1 cm, 15 x 2 cm, 10 x 3 cm, 6 x 5 cm, 5 x 6 cm ... La contrainte sur le nombre total de petits cubes réduit les investigations à 10 cubes de 3 cm, et on trouve par essais à la calculatrice: $4^3 + 6^3 = 280$.

Le volume d'un petit cube est donc de 27 cm^3.

2) Si on établit d'abord que $4^3 + 6^3 = 280$, on obtient alors 4a + 6a = 30 ; d'où a = 3 cm. Et on en déduit le volume demandé.

7 Bleib nicht auf der Strecke ! ! No se queden sobre el cuadro ! Don't stay behind on the (square) field ! Ne restez pas sur le carreau. (5 points)

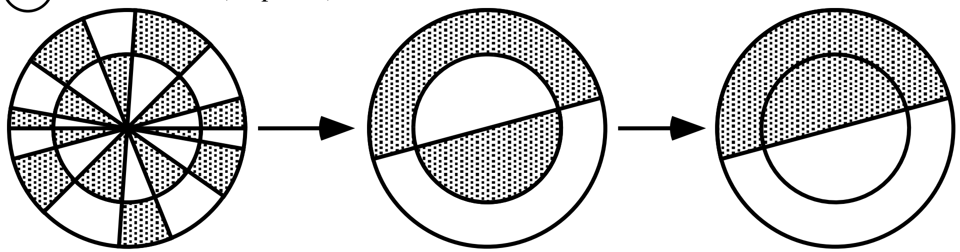


Trouver de combien de façons différentes on peut noicir 4 cases du carré ABCD de telle sorte qu'il n'y en ait qu'une par ligne et par colonne.

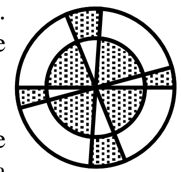
En considérant les colonnes de gauche à droite, il y a 4 façons de noircir une case dans la première colonne, il n'y a plus que 3 façons dans la deuxième colonne, seulement 2 façons dans la troisième colonne et plus qu'une seule façon pour la quatrième colonne.

Il y a donc 4 x 3 x 2 x 1 = 24 solutions.

8 Bien ciblé. (10 points)



S'il y avait un nombre pair de diamètres, les zones en grisées seraient disposées symétriquement par rapport au centre (voir dessin ci-contre). Avec un nombre impair de diamètres (peu importe le nombre), chaque zone en grisé a pour symétrique une zone blanche.



On peut regrouper alors les zones comme sur le dessin ci-dessus.

Soit R le rayon du disque intérieur. L'aire du demi-disque en grisé de rayon 10 vaut 100 π / 2. L'aire du disque intérieur doit être égale à la moitié de l'aire totale. L'aire du demi-disque intérieur vaut donc :

$$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{100\pi}{4}, \text{ d'où } R = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1 \text{ cm.}$$

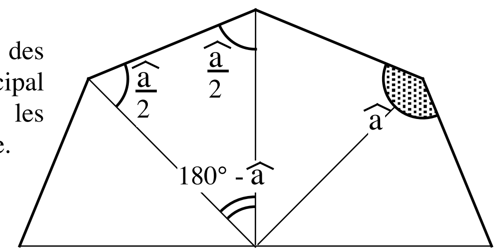
9 Mon oncle. (5 points)

Le polygone étant régulier, les angles des triangles isocèles dont le sommet principal est le centre du polygone possèdent les propriétés décrites sur la figure ci-contre.

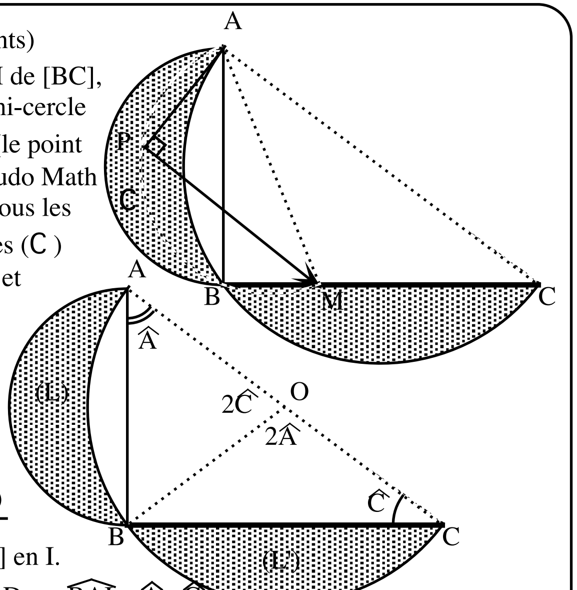
$\widehat{a} = 175°$; $180 - \widehat{a} = 5$; $360 : 5 = 72$

Le polygone a donc 72 côtés.

Mon oncle Jérémie a donc 72 ans.



4 L'aire de Lucky Luke. (15 points)



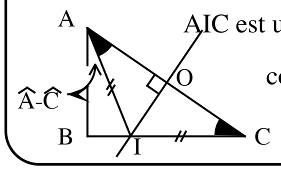
Si Ludo Math veut atteindre un point M de [BC], il doit se placer en un des points du demi-cercle (C) de diamètre [AM] et contenant B, (le point M est exclu et la longueur du bras de Ludo Math est considérée comme négligeable). A tous les points P correspondent des demi-cercles (C) intérieurs à la zone grisée sur le dessin et réciproquement (étude un peu délicate que l'on n'exigera pas des élèves).

aire (L) = $\frac{9\pi}{2} - (25\,\pi \times \frac{2\,\widehat{C}}{360} - 12)$

aire (L') = $25\,\pi \times \frac{2\,\widehat{A}}{360} - 12$

aire de (L + L') = $\frac{9\pi}{2} + 25\,\pi \times \frac{2\,(\widehat{A} - \widehat{C})}{360}$

La médiatrice de [AC] coupe [BC] en I.



AIC est un triangle isocèle. Donc $\widehat{BAI} = \widehat{A} - \widehat{C}$

$\cos \widehat{C} = \frac{OC}{IC} = \frac{BC}{AC}$. Donc $IC = \frac{25}{4}$ et $BI = \frac{7}{4}$. $\tan(\widehat{BAI}) = \frac{BI}{BA} = \frac{7}{24}$.

$\widehat{A} - \widehat{C} \approx 16{,}26°$, et $\boxed{\text{Aire } (L + L') \approx 21{,}23 \text{ cm}^2}$

5 Devinette. (5 points)

Soit x le nombre cherché. x = 222y où y est un carré. Mais x = 74 x 3 x y ; donc 3y est un cube. Donc y contient 3^2. Ainsi x = 74 x 27 x a = 1998 x a, où a est à la fois un carré et un cube. Les deux premiers nombres entiers qui sont à la fois carré et cube sont 1 et 64. Or 1998 x 64 = 127 872 > 125 000. Donc a = 1 et **le nombre cherché est 1998.**

6 Des bâtons pour se faire math. (15 points)

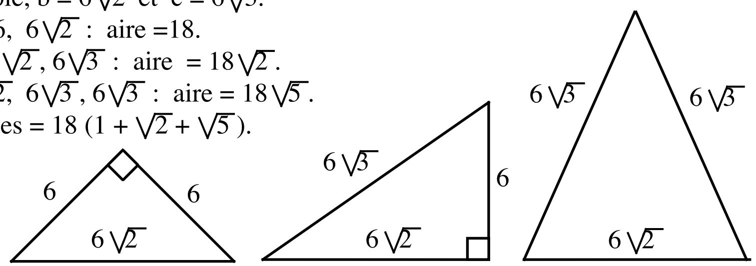
Il ne peut y avoir que trois triangles, donc un triangle rectangle isocèle, un triangle rectangle non isocèle et un triangle isocèle non rectangle. Le triangle rectangle isocèle de côté x aura pour hypoténuse $x\sqrt{2}$; compte tenu des données on ne peut avoir que x = a = 6 ; d'où, après un raisonnement simple, $b = 6\sqrt{2}$ et $c = 6\sqrt{3}$.

Triangle de côtés 6, 6, $6\sqrt{2}$: aire =18.

Triangle de côtés 6, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$: aire = $18\sqrt{2}$.

Triangle de côtés $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$: aire = $18\sqrt{5}$.

Aire totale des triangles = $18\,(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$.



10 Hommage. (5 points)

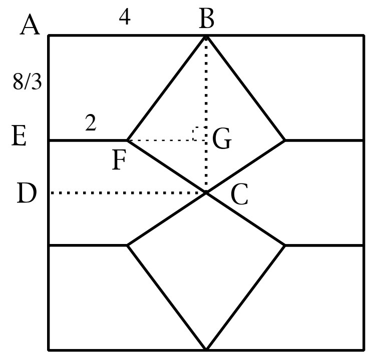
```
  M A R I E
+ C U R I E
  R A D I U M

  M A 1 2 E
+ C U 1 2 E
  1 A D 2 U M

  6 A 1 2 3
+ C 4 1 2 3
  1 A D 2 4 6

  M A 1 2 E
+ C 5 1 2 E
  1 A D 2 5 M

  6 A 1 2 8
+ C 5 1 2 8
  1 A D 2 5 6

  4 3 1 2 7
+ 9 5 1 2 7
  1 3 8 2 5 4
```

R = 1. Donc I = 2 ou I = 3 suivant qu'il y a ou non une retenue.
I + I ≤ 6, donc U ≤ 7. Il n'y a pas de retenue, et **I = 2**.
D'où U = 4 ou U = 5.
Si U = 4, alors E + E < 10 ; donc E = 3. On obtient l'addition ci-contre, et les seules possibilités pour A sont 5, 7, 8 ou 9.
Si A = 5 alors D = C = 9 : impossible. Les valeurs 7, 8 et 9 pour A donnent pour D : 1, 2 et 3, ce qui est impossible.
Donc U = 5, et pour E, il reste 7, 8 ou 9.
Si E = 9, alors M = 8. Il reste pour A : 3, 4, 6 ou 7, ce qui donne respectivement pour D : 8, 9, 1 ou 2 : impossible.
Si E = 8, alors M = 6 et il reste pour A : 3, 4, 7 ou 9.
Mais 6 + C ≤ 16. Il reste alors pour A : 3 ou 4.
Si A = 3, D = 8 : impossible. Si A = 4, D = 9 et C = 8 : impossible.
Donc **E = 7** et **M = 4.**
Mais 4 + C ≤ 14. Donc **A = 3**, **D = 8** et **C = 9**.

Compléments pour la classe de Seconde

11 L'île de Math. (10 points)

L'aire du drapeau est de 8 x 8 dm^2 = 64 dm^2.
Donc le côté du carré mesure 8 dm.
Considérons le dessin du quart supérieur gauche du drapeau. Compte tenu des symétries, on a un carré ABCD. Aire(BCF) = 4 dm^2.
Or BC = 4 dm ; donc FG = 2 dm et EF = 2 dm.
Aire(ABFE) = 8 ; donc AE = 8/3 dm (hauteur du trapèze). D'où le dessin ci-contre (échelle 1/20).



12 Non, tu n'as pas changé, é, é… (10 points)

A la banque, les 2 000 sous changés donnent 50 000 zetas. Un sou vaut 25 zetas et un zeta vaut 0,04 sou.
Trois menus font 96 sous. Au change proposé par le garçon, les trois menus reviennent à 96 x 22 = 2 112 zetas.
Mais payés directement en zetas, ils reviennent à 3 x 600 = 1 800 zetas. La différence de 312 zetas donne 312 x 0,04 = 12,48 sous.
Au cours du jour, la crêpe "Souzeta" coûte donc 12,50 sous.