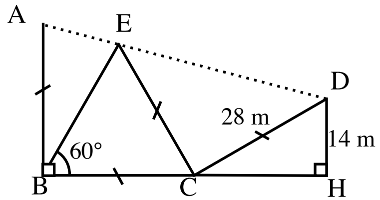
RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES 1997 - Éléments de solutions

1 Big-Bang. (5 points)

Le plus petit lancer est 4 [2 + 2 ou 3 + 1]. En retirant les jetons entourés, on peut alors retirer le 8 et 11, puis le 13, le 14, le 3, les 12 et 24, puis le 3, le 6, le 9 et le 1.
Si on envisage un plus petit lancer (3 ou 2), il est facile de constater qu'aucun des jetons autorisés par ce lancer ne permet de faire un Big-Bang.

			14	13
12			3	
		2		11
3	24	9	8	
	6	1	2	

2 Jean de la hune. (10 points)



1°) EBC est isocèle, et $\widehat{EBC} = 60°$. Donc EBC est équilatéral, BE = EC = AB et $\widehat{BEC} = 60°$.
2°) BE = BA ; BAE est isocèle, et $\widehat{ABE} = 30°$. Donc $\widehat{AEB} = 75°$.
3°) CD = 2DH ; CDH est la "moitié" d'un triangle équilatéral. Donc $\widehat{DCH} = 30°$. Comme $\widehat{BCE} = 60°$, $\widehat{DCE} = 90°$. ECD est un triangle rectangle-isocèle ; donc $\widehat{CED} = 45°$.
4°) $\widehat{AEB} + \widehat{BEC} + \widehat{CED} = 180°$. Les points A, E et D sont alignés ; D voit A malgré le rocher intermédiaire.

3 Message codé. (10 points)

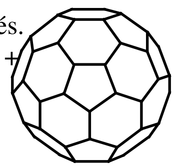
DONNEZ LES PRÉNOMS, DATES ET LIEUX DE NAISSANCE (SI POSSIBLE) DES GRANDS MATHÉMATICIENS :

FOURIER	(Baron Jean-Baptiste, Joseph)	Auxerre 1768 - Paris 1830
GALOIS	(Evariste)	Bourg-La-Reine 1811 - Paris 1832
HADAMARD	(Jacques, Salomon)	Versailles 1865 - Paris 1963
POINCARE	(Henri)	Nancy 1854 - Paris 1912

4 Ballon de football. (5 points)

Les 12 pentagones ont en tout 60 côtés, et les 20 hexagones 120 côtés. Chaque arête est commune exactement à deux faces. Il y a donc (60 + 120)/2 = 90 arêtes dans le polyèdre.

La couture a donc une longueur de 90 x 4,5 cm = 405 cm.



8 Musiques à céder. (10 points)

	Jazz				Variétés				Classique			
	2CD	3CD	4CD	5CD	2CD	3CD	4CD	5CD	2CD	3CD	5CD	6CD
Anne		1°					1°			5°		
Hélène	3°							3°				
Basile	3°			4°		5°		3°	5°			
Luc	2°		4°					2°			4°	

1°) A partir des affirmations (6) et (3), on obtient que c'est Anne qui a 3 CD de Jazz et 4 CD de Variétés, puisque Luc ne peut avoir 4 CD Classiques. L'affirmation (1) permet alors d'éliminer les autres cases sur la même ligne et même colonne, dans chaque catégorie. De plus Luc ne peut avoir 6 CD classique puisqu'il ne peut y avoir 6 CD de Jazz ou de Variétés
2°) L'affirmation (4) indique que Luc ne peut avoir 2 CD de Jazz ni 5 CD de Variétés.
3°) L'affirmation (5) élimine pour Basile 2 CD de Jazz et 5 CD de Variétés. C'est donc Hélène qui a 2 CD de Jazz et 5 CD de Variétés. On élimine alors les cases .
4°) L'affirmation (6) nous permet alors de savoir que Luc a 5 CD Classiques et Basile 5 CD de Jazz. On peut lors éliminer les cases . Et on en déduit que Luc a 4 CD de Jazz.
5°) Reste l'affirmation (7) ; si AC désigne le nombre de CD Classiques d'Anne, BV et BC respectivement les nombres de CD de Variétés et Classiques de Basile, on a : 7 + AC = 5 + BV + BC. Si AC = 2, BV + BC = 4, ce qui est impossible. Si AC = 6, alors il faut BC = 6 aussi, ce qui est impossible. Donc AC = 3, et BV + BC = 3 + 2. On a obligatoirement BC = 2, donc BV = 3. Il reste alors LV = 2 et HC = 6.
D'où la répartition dans le tableau ci-contre.

	J	V	C
A	3	4	3
H	2	5	6
B	5	3	2
L	4	2	5

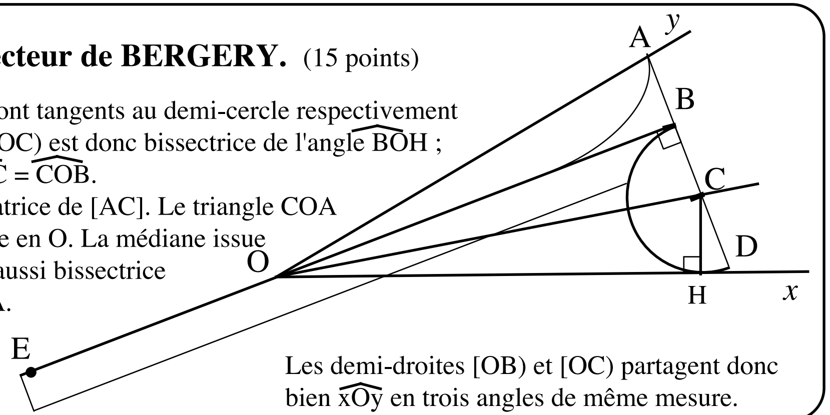
9 Cumpleaños. Geburtstag. Birthday. Anniversaire. (10 points)

Répartition		Effectifs par ligne	Effectifs cumulés
00 01 02 03 04 05 06 07 08	09	45	45
10 11 12 13 ...	19	45 + 10 x 1 = 55	45 + 55 = 100
20 21 22 ...	29	45 + 10 x 2 = 65	100 + 65 = 165
... ...	...		165 + 75 = 240
			240 + 85 = 325
50 ...	59	45 + 10 x 5 = 95	325 + 95 = 420
60 61 62.			420 + 105 = 525

En écrivant les nombres suivant le tableau ci-dessus, et en totalisant les chiffres des unités d'une part et ceux des dizaines d'autre part, on obtient facilement les effectifs par ligne, puis les effectifs cumulés. Il faut ajouter 21 bougies aux 59 anniversaires.

Mon grand-père a donc 62 ans. Il y a 6 x 45 + 3 = 273 bougies blanches (unités) et 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 18 = 168 bougies vertes (dizaines).

(5) Le trisecteur de BERGERY. (15 points)



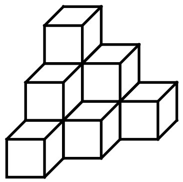
(OB) et (Ox) sont tangents au demi-cercle respectivement en B et en H. (OC) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{BOH}$; on a donc $\widehat{DOC} = \widehat{COB}$.
(OB) est médiatrice de [AC]. Le triangle COA est donc isocèle en O. La médiane issue de O est donc aussi bissectrice de l'angle $\widehat{COA}$.

Les demi-droites [OB) et [OC) partagent donc bien $\widehat{xOy}$ en trois angles de même mesure.

(6) Pyramides de cubes. (15 points)

Si on appelle C(n) le nombre de cubes du niveau inférieur de la pyramide P(n) de n étages, C(n) = C(n-1) + n. Donc C(n) = 1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2.
Le nombre de cubes de P(n) est donc P(n) = C(1) + C(2) + ... + C(n) = n(n + 1)(n + 2)/6.
Pour les élèves, seul un calcul par approches successives pouvait être envisagé. Il fallait faire preuve de beaucoup de méthode, la calculatrice étant ici une aide possible.

n	C(n)		P(n)
1	1	+ 2	1
2	1 + 2 = 3	+ 3	1 + 3 = 4
3	(1 + 2) + 3 = 6	+ 4	(1 + 3) + 6 = 10
....	....	...	....
10	45 + 10 = 55	+11	165 + 55 = 220
....	....	...	....
21	210 + 21 = 231	+ 22	1540 + 231 = 1771
22	231 + 22 = 253		1771 + 253 = 2024

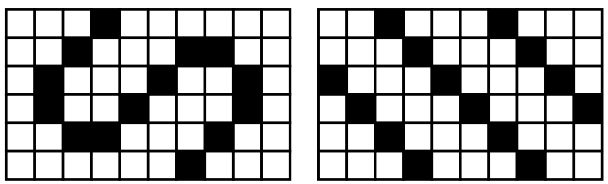


3 étages

La pyramide de 10 étages nécessite 220 cubes.
La plus grande pyramide que l'on peut faire avec 1997 cubes est une pyramide de 21 étages.
Il restera 226 cubes, de quoi faire en plus une pyramide P(10) et une pyramyde P(2), et 2 cubes resteront.

(7) Activité sans T. (10 points)

Voici deux solutions avec 14 cases noircies.
La deuxième est une solution dans le plan.



(10) 1997. (5 points)

Le nombre doit commencer par un 1 suivi du plus grand nombre possible de 0 (zéro).
Les derniers chiffres doivent donc être les plus grands possibles.
1997 - 1 = 221 x 9 + 7. En partant des unités, les 221 premiers chiffres seront donc des 9, le 222ème chiffre sera un 7 qui sera séparé du 1 par 1774 zéros.

$$1\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{1774}7\underbrace{9\ldots\ldots\ldots\ldots9}_{221}$$

Complément pour les classes de Seconde

(11) Mathadamus. (15 points)

$12^3 = 1728$; $13^3 = 2197$. Donc la prophétie a été faite en 1728, au 18e siècle(Mathadamus).
L'année cubique 2197 est dans le 22e siècle (siècle bionique).
Précédant le siècle bionique, est le 21e siècle (siècle micronique).
La première année bissextile du siècle micronique (2001 - 2100) est 2004. Cette date permet de trouver l'année 1997, (2004 - 7), année du 20e siècle (siècle informatique).
(Remarque : entre temps, il y aura la dernière année bissextile du 20e siècle , soit 2000. 2100, dernière année du 21e siècle, ne sera pas bissextile.)
1997 est un nombre premier, et $1997 = 29^2 + 34^2$.
Pour trouver cette dernière égalité, on peut remarquer qu'une racine carrée approchée de 1997 est 44, et que les carrés des entiers se terminent seulement par 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, ce qui limite la recherche aux nombres dont les carrés se terminent par 1 d'une part, par 6 d'autre part. La calculatrice est, ici, une aide précieuse.

(12) Les deux mouches. (10 points)

OA = R et SA = 3R. $\frac{CI}{AO} = \frac{SC}{SA}$, soit $CI = \frac{SC}{3}$.
En posant CA = x, SC = 3R - x. D'où $CI = R\ \frac{x}{3}$.

La première mouche parcourt $L = 2\pi R$.
La seconde mouche parcourt $l = x + 2\pi\,(R\ \frac{x}{3}) + x = 2\pi R - 2x(\frac{\pi}{3} - 1)$
On a : $L - l = 2x\,(\frac{\pi}{3} - 1)$;

$x > 0$; $\frac{\pi}{3} - 1 > 0$; donc $L > l$

<u>La seconde mouche arrivera la première car son trajet est plus court.</u>