RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES 1996 Eléments de solutions

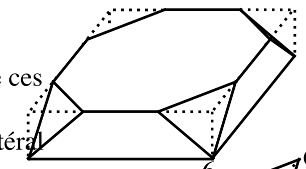
1 Mini-Loto (5 points)

Le nombre total des numéros joués est 43 + 57 +...+ 44 = 720, ce qui correspond, à raison de 5 numéros par grille, à 720 : 5 = 144 grilles.
(La somme 720 était facile à calculer par association de certains termes comme 43 et 57, 32 et 98, etc).
Chaque grille étant vendue 10 F, **la vente de ces grilles a rapporté 1440 F**.

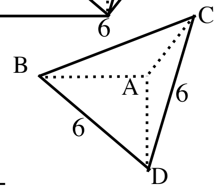
2 Les quatre conférenciers (5 points)

Notons A, B, C et D les conférenciers. Utilisons le codage Xy pour signifier que le conférencier X intervient le y-ième et Non(Xy) dans le cas contraire.
Si A1 alors C2 : si B3 alors D1 : contradiction avec A1.
si B4 alors D3 et donc C4 : contradiction avec B4.
Donc Non(A1) d'où D3, d'où C4 :
si B2 alors A1 ; contradiction avec Non(A1) ;
si A2 alors B1 ; sans contradiction.
En résumé : **B1, A2, D3, C4.**

3 Mise en boîte (15 points)



On peut considérer la boîte comme un parallèlépipède rectangle à base carrée privé de quatre "coins", chacun de ces coins étant un trièdre tri-rectangle. Soit l'un d'entre eux ABCD (voir figures). La base BCD est un triangle équilatéral de côté 6. Les autres bases sont des triangles rectangles.



On a $AB^2 + AC^2 = 36$, $AC^2 + AD^2 = 36$, $AD^2 + AB^2 = 36$.
On en déduit que $AB = AC = AD = 3\sqrt{2}$.

En conséquence la base du parallèlépipède mesure $6 + 2\times 3\sqrt{2}$,
la hauteur mesure $3\sqrt{2}$, d'où son volume : $(6 + 2\times 3\sqrt{2})^2 \times 3\sqrt{2} = 324\sqrt{2} + 432$
Le volume d'un trièdre (base BAD d'aire $(3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2})/2$,
hauteur AC de longueur $3\sqrt{2}$) est égal à : $(3\sqrt{2})^3/(2\times 3) = 9\sqrt{2}$.
Le volume de la boîte (parallèlépipède privé de quatre "coins") vaut :
$432 + 324\sqrt{2} - 36\sqrt{2} =$ **$432 + 288\sqrt{2} = 839,29...\text{cm}^3$.**

4 Le Prof. Ila Ransor (10 points)

Soit X le nombre <u>entier</u> cherché. On a : $X + 29 = a^2$ et $X - 60 = b^2$.

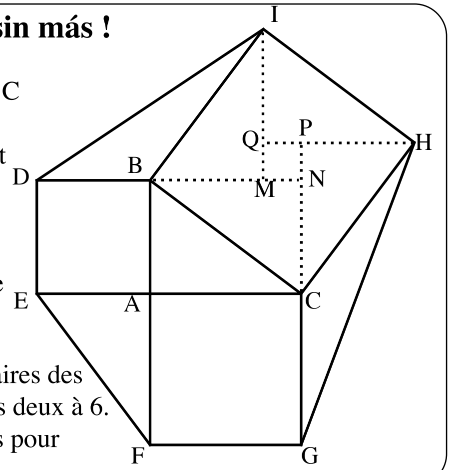
Par suite $a^2 - b^2 = 89$, d'où $(a - b) \times (a + b) = 89$.

89 étant un nombre premier, on a nécessairement a - b = 1 et a + b = 89 ,
donc a = 45 et b = 44. On en déduit : X = 2025 - 29, soit **X = 1996.**

8 A la recherche de l'âge perdu (10 points)

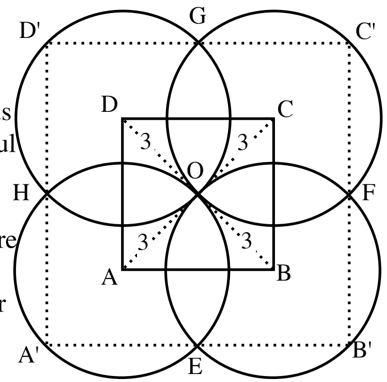
Il est impossible que je sois né en 18ab, a et b étant deux chiffres. En effet mon âge serait dans ce cas : 1997 - 18ab = 197 - 10xa - b, d' où : 197 - 10xa - b = 1 + 8 + a + b,
soit 188 = 11xa + 2xb ; mais 11xa + 2xb ≤ 11x9 + 2x9 , ce qui conduirait à 188 ≤ 117. Soit donc 19ab mon année de naissance. Mon âge l'an prochain sera :
1997 - 19ab = 97 - 10xa - b, et donc : 97 - 10xa - b = 1 + 9 + a + b ; d'où 87 - 2xb = 11xa. En faisant succes- sivement b = 1, 2,..., 9 dans 87 - 2xb, le seul multiple de 11 trouvé est 77.
Par suite a = 7, b = 5. **Année de naissance : 1975 ; âge : 21 ans (cette année).**

9 Flächeninhalt nicht ohne ! ¡ Area sin más ! An innocent surface ! (10 points)



Le triangle ABC étant rectangle , l'hypoténuse BC = 5. Les aires du triangle ABC, des trois carrés adjacents et du triangle FAE sont respectivement 6, 9, 16, 25 et 6. Si on cherche la hauteur IM du triangle IDB relativement à la base DB et la hauteur HP du triangle HCG relativement à la base CG, on est amené à faire la construction de la figure ci-contre. L'étude géométrique de la figure conduit à
IM = BN = AC = 4 et PH = BM = CN = 3. Les aires des triangles IDB et HCG sont donc égales toutes les deux à 6.
On fait la somme des différents résultats obtenus pour trouver **l'aire totale**, soit **74**.

10 L'arroseur arrosé (10 points)



Soit le le carré A'B'C'D' **(voir figure).**

Après avoir longtemps hésité à poser cet exercice nous avons pensé que la construction de la figure et le calcul de l'aire A'B'C'D' présentaient de l'intérêt pour les élèves et qu'ils concluraient ... en faveur de A'B'C'D'.
Les quatre disques sont à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 12. La distance maximum entre deux points de ce disque est 12 - pour les points A' et C' par exemple. La diagonale d'un rectangle inclu dans la surface arrosée ne peut donc être plus grande que 12.
De tous les rectangles de diagonale 12, c'est le carré qui a la plus grande aire.
Le carré A'B'C'D' répond effectivement à la question.
Le calcul du côté A'B' ne présente aucune difficulté : $6\sqrt{2}$.
Aire du carré A'B'C'D' : 72 m² .

5 Une lettre du jeudi 29 février (10 points)

La première phrase de la lettre est sans aucun doute la date, ce qui donne les correspondances E = J, U =E, X = U, K = D, R = I, O = F, T = V, W = R.
Il semble qu'il y ait au début une énumération de noms et donc UC = ET probablement, soit C = T. Des essais successifs peuvent conduire à penser par exemple que SHNC peut être SONT, ce qui conduirait à EHWKAN = JORDAN (Camille Jordan 1838-1922 ; ce qui confirme le choix des lettres).
Puis avec AWDIRZUKU = ARCHIMEDE, on arrive pratiquement à finir le décryptage.

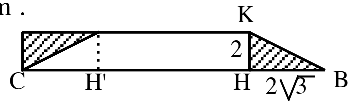
*«Archimède, Euclide,Pythagore et Zénon sont tous les quatre bien connus.
Par contre Eudoxe, Fermat, Gauss, Viète et Weierstrass le sont moins.
Décryptez ce texte et donnez -nous en plus les prénoms de Jordan (1838-1922)
et de madame Germain (1776-1831).»*

Camille Jordan ; Sophie Germain.

6 Pierre de Taille (15 points)

Cherchons le volume d'un des morceaux par exemple le morceau de base BC. En coupant ce morceau en deux et en plaçant les deux parties tête-bêche on obtient un cylindre - voir figure.

Les longueurs sont données en dm et les volumes en dm^3.



L'angle $\widehat{\mathbf{HBK}}$ mesure 30°, KH = 2 ;
donc BH = $2\sqrt{3}$. H'C = BH ; d'où HC = $10 - 2\sqrt{3}$.

Le rayon du cylindre est 1, sa hauteur $10 - 2\sqrt{3}$, son volume est égal à $\pi\,(10 - 2\sqrt{3})$.

Le volume de la sculpture est le triple du volume d'un morceau,
soit $\pi\,(30 - 6\sqrt{3})$ et **sa masse est égale à $2\pi\,(30 - 6\sqrt{3}) \approx 123{,}198$ kg.**

7 Chez Grand-mère (5 points)

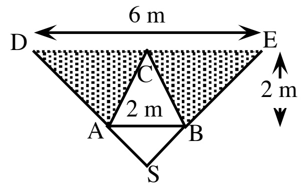
Notons A, B, C, D, E les cinq phrases décrivant la situation.
D'après B et D, on a nécessairement sur l'étagère supérieure le sucre, la farine, le sel et les bonbons, et sous le sel le riz. Le chocolat, le café et le riz étant, d'après E, sur une même étagère, ce ne peut être que l'étagère inférieure, l'autre étant déja garnie de quatre pots (A). C'est également le cas des épices et des nouilles (C). En reprenant alors toutes ces déductions, on peut préciser la position du pot de lentilles :

Sucre	Farine	Sel	Bonbons	**Lentilles**
Café	Chocolat	Riz	Epices	Nouilles

Complément pour les classes de Seconde

11 Dans le jardin de Bélinda (10 points)

Soit v le volume du tronc de cône de section ADEB et v' le volume du cône de section ACB.
La contenance du bassin sera : V = v - v'. On trouve immédiatement v' = $2\pi/3$. Le cône de section SDE (voir figure) a pour hauteur 3m (calcul par utilisation du théorème de Thalès). v est égal à la différence des volumes du cône de section SDE et

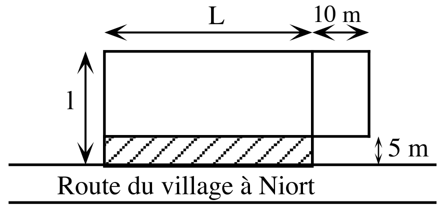


du cône de section SAB, soit : v = $27\,\pi/3 - \pi/3 = 26\,\pi/3$. D'où V = $24\,\pi/3 = 8\pi$.
Contenance : $8\pi \approx 25{,}133$ (en m^3).

12 Problème Tout-Terrain (P.T.T.) (15 points)

Le terrain doit être tel que

$l < L$ (1)
$60 < l + L < 80$ (2)



A noter que (1) est respectée a fortiori dans le terrain définitif.
L'aire perdue est *5 L*,
l'aire gagnée est *10 (l - 5)*.
Il faut donc *10 (l - 5) > 5 L*,
soit *2 l - L - 10 > 0* (3).
On trace les droites d'équations
l - L = 0 ; l + L - 60 = 0 ; l + L - 80 = 0, et 2 l - L - 10 = 0.
On hachure les régions interdites ;
les solutions possibles sont dans la région non hachurée : (30 , 35),
(30 , 40), (30 ,45) et (35 , 40).
Le gain pour le propriétaire est
10(l - 5) - 5 L. Parmi les 4 cas, le gain le plus important est obtenu pour **(35 , 40).**