RALLYE MATHEMATIQUE POITOU - CHARENTES. 20 avril 1995. *Éléments de* ***SOLUTIONS***

① Ma calculette est trop petite. (5 points)

```
  11        111
x 11      x 111
  11        111
 11        111
 121      111
          12321
```

Si 12345678987654321 est le carré d'un nombre entier, alors ce nombre entier est unique. En observant le carré de 11 et éventuellement celui de 111, on obtient :

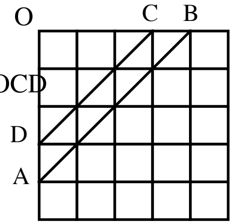
12345678987654321 est le carré de 111111111.

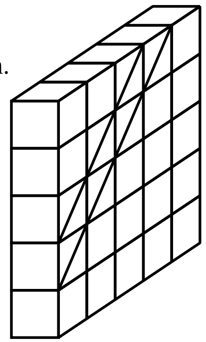
```
          111111111
        x 111111111
          111111111
         111111111
       .................
     .................
  111111111
  12345678987654321
```

② Le cube évidé. (10 points)

Le trou est un prisme de base le trapèze ABCD et de hauteur 10 cm.
Le volume est donc celui de sept demi-cubes de 10 cm d'arête.
Le volume est donc de 3500 cm³

On peut aussi calculer l'aire de ABCD par différence des aires des triangles OAB et OCD qui sont rectangles et isocèles.
On peut encore calculer les longueurs des bases du trapèze et sa hauteur.





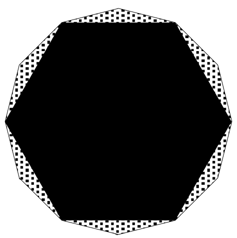
③ Jérôme et Evariste. (5 points)

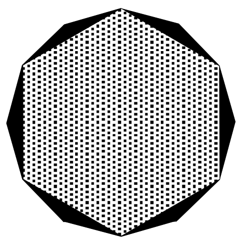
Multiples de 34 ayant trois chiffres, et inférieurs à 467	102, (m)	136,	170,	204, (m)	238,	272, (d)	306, (m)	**340**,	374,	408, (m)	442. (d)
Complément à 467 ayant trois chiffres		331, (d)	297, (m)		229, (d)			**127**.			

En éliminant les multiples de 3 (m) et ceux qui ont un chiffre double (d)
il ne reste qu'une solution : 340 et 127.

⑤ Le rouge et le noir. (10 points)

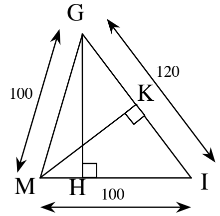
Sur les dessins demandés, les deux hexagones réguliers (fond et couvercle) se déduisent l'un de l'autre par une rotation de centre leur centre, et d'angle 30°.
Les triangles latéraux relient un côté de l'un avec un sommet de l'autre.





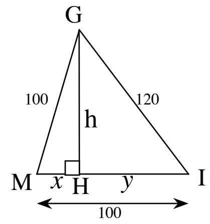
Dans les deux cas l'hexagone régulier et le dodécagone régulier sont construits dans un cercle de rayon 5 cm

⑧ Desert rally.¡ Rallye del desierto ! Rallye in der Sandwüste



Première méthode :

Le triangle GMI est isocèle de sommet M. Le point K, pied de la hauteur issue de M, est donc le milieu de [GI].
Connaissant KI et MI on calcule MK par la relation de Pythagore dans le triangle MKI rectangle en K : MK = 80.
En exprimant l'aire du triangle GMI de deux façons :
MI x GH/2 et GI x MK/2, on en déduit GH.
100 x GH = 120 x 80. d'où GH = 96.



Deuxième méthode :
Soit MH = x et HI = y.
On a : $x + y = 100$; $x^2 + h^2 = 100^2$ et $y^2 + h^2 = 120^2$.
$y^2 - x^2 = 120^2 - 100^2$; $(y + x)(y - x) = 100\,(y - x) = 4400$.
$\begin{cases} y + x = 100 \\ y - x = 44 \end{cases}$ D'où $x = 28$ et $y = 72$. $h = \sqrt{100^2 - 28^2} = 96$.

⑩ Dessin bien ciblé. (10 points)

Les aires des disques étant successivement πr^2 , $4\pi r^2$, $9\pi r^2$, ... , $49\pi r^2$ et $64\pi r^2$, les aires des couronnes sont, par différence : πr^2 , $3\pi r^2$, $5\pi r^2$, ..., $15\pi r^2$, et donc proportionnelles à 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 et 15.
R = Rouge, J = Jaune, V = Vert et B = Bleu.

a) Dressons, à partir de cette suite, une "table d'addition" en excluant les couples (1, 3), (3, 5), ..., (13, 15) côte à côte dans la cible. Pour les associations B = 4R, seuls 6 et 24 répondent à cette condition. On a donc la répartition suivante pour les couleurs Bleu et Rouge :

+	1	3	5	7	9	11	13
1							
3	X						
5	6	X					
7	8	10	X				
9	10	12	14	X			
11	12	14	16	18	X		
13	14	16	18	20	22	X	
15	16	18	20	22	24	26	X

1	3	5	7	9	11	13	15
R		R		B			B

b) On a alors V + J = 3 + 7 + 11 + 13 = 34.
Les couronnes 11 et 13 n'étant pas de la même couleur (côte à côte dans la cible), et comme J > V, on a deux possibilités : (J, V) = (20=7+13, 14=3+11) ou (J, V) = (18=7+11, 16=3+13).
D'où les deux solutions ci-dessous :

1	3	5	7	9	11	13	15
R	V	R	J	B	J	V	B
R	V	R	J	B	V	J	B

Complément pour les classes de Seconde

4 Le défilé du 14 juillet. (10 points)

Le nombre de soldats est un multiple de 19x3, de 19x5 et de 19x7.
C'est donc un multiple de 19x3x5x7 = 1995. Or ce nombre est inférieur à 2000.
Il y a donc 1995 soldats.

6 On calcule rondement et carrément ! (10 points)

Le calcul du prix du kg indique que le chiffre des unités du nombre de kg est 7. Le bilan de la cueillette montre que le chiffre des dizaines est nécessairement 1. Le bilan de la cueillette est donc de 17 kg qui est nécessairement ici la somme de 9 kg (pour Françoise dont la cueillette a été plus abondante) et de 8 kg pour Hervé.
Le prix au kg est un nombre à 2 chiffres plus grand que 10 (chiffre des unités non nul) et plus petit que 12 car 9 x12 = 108 (nombre à 3 chiffres).
Le prix d'un kg est donc de 11 F ; ***Françoise a reçu 99 F et Hervé 88 F.***

7 Les vacances.

Notons (1), (2), (3) et (4) les quatre propositions.

1ère démonstration : Faisons l'hypothèse : "Luc ne va pas à la mer". Alors, d'après (2), René va à la montagne et, d'après (1), Luc doit aller à la campagne et donc Paul à la mer. Mais, d'après (1), René étant à la montagne, Paul ne doit pas aller à la mer. Il y a contradiction. L'hypothèse est à rejeter. Donc Luc doit passer ses vacances à la mer.
D'après (4) et (1), René doit alors aller à la campagne, et d'après (1) Paul doit aller à la montagne. Cette situation est compatible avec (3).
La réponse est donc : **Luc va à la mer, René à la campagne et Paul à la montagne.**

2ème démonstration :

6 répartitions, d'après (1).

Mer	Montagne	Campagne	Interdit par
Luc	Paul	René	
Luc	René	Paul	(4)
Paul	Luc	René	(2)
Paul	René	Luc	(3)
René	Luc	Paul	(2)
René	Paul	Luc	(2)

9 Le patron n'est pas complet. (15 points)

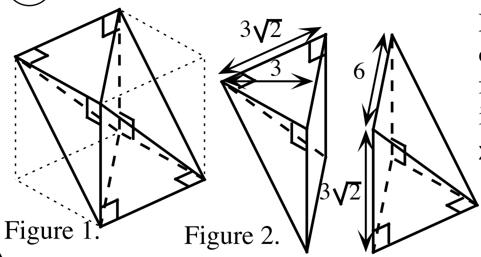


Figure 1. Figure 2.

Le solide obtenu par le patron est celui qu'on obtient en tronquant un cube comme indiqué sur la figure 1. Ce solide est formé de deux pyramides isométriques de base un rectangle de dimension 6 x$3\sqrt{2}$ et de hauteur 3.

$$V = 2 \times \left(\frac{1}{3} \times 6 \times 3\sqrt{2} \times 3\right) = 36\sqrt{2}$$

$$V \approx 50{,}912 \approx 51 \text{ cm}^3$$

11 Qui est qui ? (15 points)

Une case barrée signale les impossibilités constatées à la lecture du (ou des) renseignement(s) rappelé(s) par le (ou les) numéro(s).

Codes utilisés :
P : Poitevin
N : Niortais
L : (La) Rochelais
R : Rochefortais
P' : Parthenaisien
S : Saintais

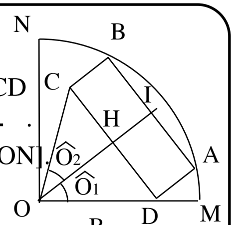
m : médecin
p : professeur
i : ingénieur
s : soldat
c : civil

Transcription du texte renseignement par renseignement :
(1) **A** et *P* : m
(2) **E** et *N* : p
(3) **C** et *L* : i
(4) **B** et **F** : s, *L* : c
(5) *P'* > **A**
(6) *R* > **C**
(7) **B** ≠ *P*
(8) **C** ≠ *P'*

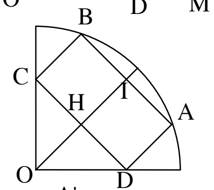
	P m	*N* p	*L* i,c	*R*	*P'*	*S*
m **A**	(1)	(1) (2)	(1) (3)	III	(5)	
s **B**	(7)	VI	(4)			
i **C**	(1) (3)	(1) (3)	(3)	(6)	(8)	I
D			II			
p **E**	(1) (2)	(2)	(2) (3)		V	
s **F**	IV		(4)			

La troisième ligne et la troisième colonne montrent que **C** est Saintais et que le Rochelais est **D**. I et II
En grisant alors, en clair, les nouvelles impossibilités, la première ligne et la première colonne ne laissent plus d'alternative pour **A** qui est donc Rochefortais III et le Poitevin qui est **F** IV
En grisant enfin, en foncé, les dernières impossibilités, on observe que **E** est nécessairement Parthenaisien V, et que **B** est Niortais VI
Récapitulons :
A est *Rochefortais* et médecin ; **B** est *Niortais* et professeur ; **C** est *Saintais* et ingénieur ; **D** est *Rochelais* et ingénieur ; **E** est *Parthenaisien* et professeur ; **F** est *Poitevin* et médecin.

12 Les étagères de Fabrice. (15 points)

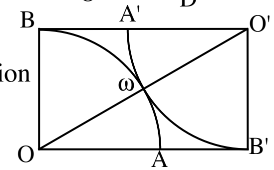


1) La médiatrice de [AB] passe par O. C'est aussi celle de [CD] car ABCD est un rectangle. Donc $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$. Par suite, si C est sur [ON], $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \frac{\pi}{4}$.
Il y a donc une position unique pour la planche : OC = OD et C est sur [ON].
OHD est un triangle rectangle isocèle. OH = HD = $\frac{21}{2}$



OI = OH + HI = $\frac{21}{2} + 11 = \frac{43}{2}$. Dans le triangle OIA rectangle en I,
la relation de Pythagore donne : $OA^2 = OI^2 + IA^2 = \left(\frac{21}{2}\right)^2 + \left(\frac{43}{2}\right)^2 = \frac{2290}{4}$
D'où R = $\frac{\sqrt{2290}}{2} \approx 23{,}93$ (par excès)

2) Les deux cercles de centres O et O' sont tangents en ω.



OO' = O ω + ω O'. Les points O, ω et O' sont donc alignés,
OO' = 2R et OB = R. Dans le triangle OO'B rectangle en B, la relation de Pythagore donne : $O'B^2 = O'O^2 - OB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$.
$O'B = R\sqrt{3} = \frac{\sqrt{2290} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6870}}{2} \approx 41{,}44$ cm .
On pouvait remarquer que OO'B' est la "moitié" d'un triangle équilatéral dont OB' est une hauteur. Donc $OB' = OO'\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.