Rallye Mathématique Poitou - Charentes

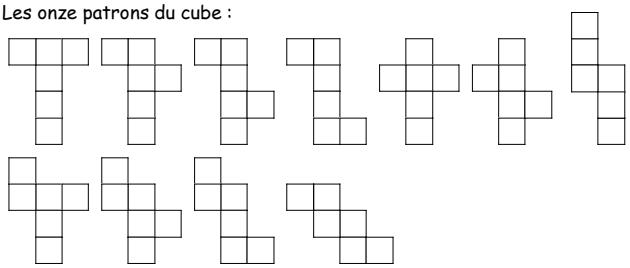
20 février 2007
Éléments de solutions

6e

1 Alicia BOOLE-STOTT *(8 points)*

Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien George Boole et la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.

Les onze patrons du cube :



2 La valeur des fruits *(10 points)*

1°) Voici quelque fruits "égaux" deux par deux :
BANANE et PÊCHE (37), FIGUE et COING (48), RAISIN et CASSIS (70), PRUNE et TOMATE (74), MIRABELLE et MUSCAT (77)...

2°) et quelques fruits égaux trois par trois :
ANANAS, CAJOU et DATTE (50), CERISE, MELON et SORBE (59), AVOCAT, NOIX et POMME (62), GUIGNE, OLIVE et POIRE (63)...

3 Des valises à boucler *(5 points)*

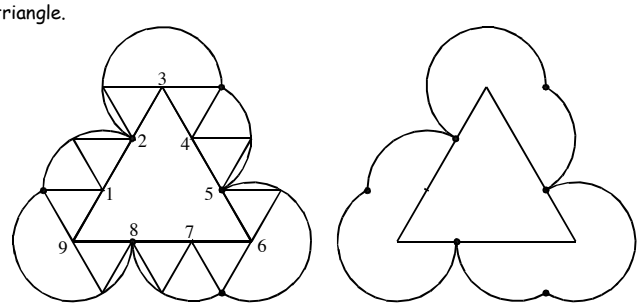
En répartissant à peu près les masses par un calcul mental sur les ordres de grandeur, et en procédant à des ajustements, on obtient la répartition suivante en grammes :
6 800 + 4 800 + 3 600 + 1 500 + 700 + 2 500 = 19 900 ;
6 300 + 5 400 + 3 200 + 1 900 + 700 + 2 500 = 20 000.

4 Chiffres au compteur *(10 points)*

1°) On observe les chiffres non utilisés (0, 2, 3, 4, 5, 6 et 9) on choisit le plus petit (plus grand que 1) pour le chiffre de plus grand rang. Le premier palindrome qui répond aux conditions est donc 20 302 qui sera obtenu dans 2 431 km.
2°) Dans les mêmes conditions, le suivant est 45654.

5 Triangle au tournant *(15 points)*

Une méthode sûre pour obtenir le tracé pouvait être de découper un triangle, d'y repérer un point M (point noir sur le dessin ci-dessous) et de le suivre en faisant "tourner" le triangle découpé autour du grand triangle.



Rallye Mathématique Poitou - Charentes

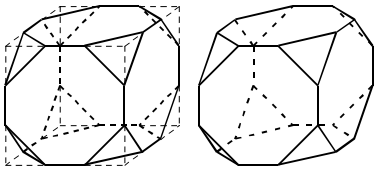
20 février 2007
Éléments de solutions

5e

1 Alicia BOOLE-STOTT *(15 points)*

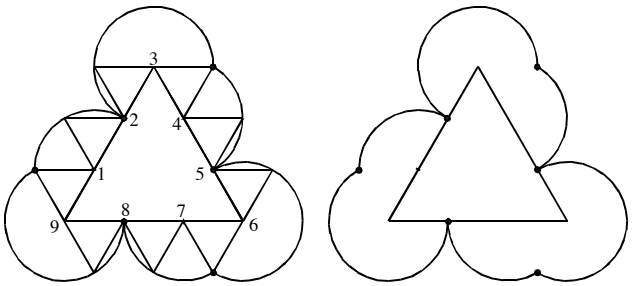
Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien George Boole et la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.

Le solide obtenu a
- 14 faces (6 faces du cube plus 8 autres faces, une à chaque sommet du cube)
- 36 arêtes (12 arêtes du cube plus 3 arêtes dans chaque sommet du cube)
- 24 sommets (3 sommets à la place de chacun des 8 sommets du cube).



2 Triangle au tournant *(15 points)*

Une méthode sûre pour obtenir le tracé pouvait être de découper un triangle, d'y repérer un point M (point noir sur le dessin ci-dessous) et de le suivre en faisant "tourner" le triangle découpé autour du grand triangle.



3 Devinette *(10 points)*

En mettant les informations dans l'ordre ci-dessous, on obtient :
1 = A pour la seconde lettre, 12 = L pour la troisième lettre, 18 = R pour la première lettre, 12 = L pour la quatrième lettre. La définition de la sixième lettre prête à confusion ; mais la dernière information lève l'ambiguïté et on obtient 5 = E pour la sixième et 25 = Y pour la cinquième.
Ainsi le mot cherché est **RALLYE**.

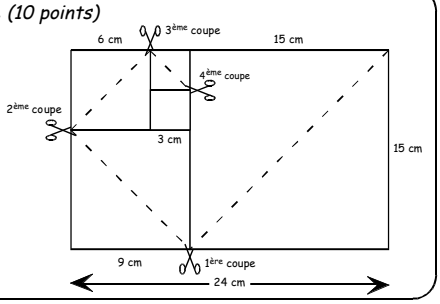
4 Avec quatre nombres *(15 points)*

1852 5128

Voici des solutions jusqu'à **43** :
0 = 8 – (1 + 2 + 5) ; **1** = [(8 : 2) + 1] : 5 ; **2** = 2 x 5 - 8 x 1 ; **3** = 2 x 5 - (8 - 1)
4 = 8 : (5 - 2 - 1) ; **5** = 8 - (5 - 2 x 1) ; **6** = 8 - [5 - (2 + 1)] ; **7** = (8 + 5 + 1) : 2 ;
8 = (8 : 2) + 5 - 1 ; **9** = (8 : 2) + (5 : 1) ; **10** = 8 + (5 - 2 - 1) ; **11** = 8 x 2 x 1 - 5 ;
12 = 8 + 5 - 2 + 1 ; **13** = (8 + 5) : (2 - 1) ; **14** = 8 + 5 + 2 - 1 ; **15** = 8 + 5 + 2 x 1 ;
16 = 8 + 5 + 2 + 1 ; **17** = 5 x 2 + 8 - 1 ; **18** = 5 x 2 + 8 : 1 ; **19** = 5 x 2 + 8 + 1 ;
20 = 8 x 2 + 5 - 1 ; **21** = 8 x 2 + 5 : 1 ; **22** = 8 x 2 + 5 + 1 ; **23** = (2 + 1) x 5 + 8 ;
24 = 8 x (5 - 2 x 1) ; **25** = (8 - 2 - 1) x 5 ; **26** = (8 + 5) x 2 : 1 ; **27** = (8 + 5) x 2 + 1 ;
28 = (8 + 5 + 1) x 2 ; **29** = 8 x (2 + 1) + 5 ; **30** = (8 - 2) x 5 x 1 ; **31** = (8 - 2) x 5 + 1 ;
32 = 8 x (5 + 1 - 2) ; **33** = (8 - 1) x 5 - 2 ; **34** = 8 x (5 - 1) + 2 ; **35** = (8 - 2 + 1) x 5 ;
36 = (8 - 2)(5 + 1) ; **37** = 8 x 5 - 2 - 1 ; **38** = 8 x 5 - 2 x 1 ; **39** = 8 x 5 - 2 + 1 ;
40 = (8 + 2)(5 - 1) ; **41** = 8 x 5 + 2 - 1 ; **42** = 8 x 5 + 2 x 1 ; **43** = 8 x 5 + 2 + 1 ;
44 = 8 x (5 + 2 : 1) ; **45** = (8 + 2 - 1) x 5 ; **46** = (5 + 1) x 8 - 2 ; **47** = (8 + 1) x 5 + 2 ;
48 = 8 x (5 + 2 - 1) ; **49** = (5 + 2)(8 - 1) ; **50** = 5 x (8 + 2) x 1 ; **51** = 5 x (8 + 2) + 1 ;
Qui trouvera 52 ?

5 Pliage et découpage *(10 points)*

En partant du carré de 3x3 et en "remontant" les opérations, on obtient un rectangle de 24 x 15.
Remarque : Il n'était pas dit que les carrés successifs étaient de dimensions différentes. Aussi le rectangle initial peut avoir d'autres dimensions.



Rallye Mathématique Poitou - Charentes

20 février 2007

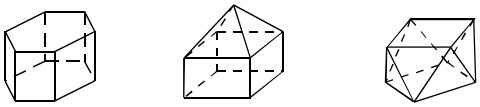
Éléments de solutions

4e

1 Alicia BOOLE-STOTT *(15 points)*

Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien George Boole et la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.

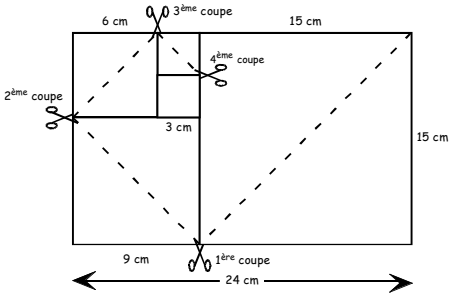
Formule d'Euler : F + S = A + 2.



(A) 8 + 12 = 18 + 2. (B) 9 + 9 = 16 + 2. (C) 10 + 8 = 16 + 2.

2 Pliage et découpage *(10 points)*

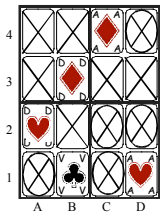
En partant du carré de 3x3 et en "remontant" les opérations, on obtient un rectangle de 24 x 15.
Remarque : Il n'était pas dit que les carrés successifs étaient de dimensions différentes. Aussi le rectangle initial peut avoir d'autres dimensions.



3 La barbe du Père Noël *(15 points)*

Partant du 25 décembre 2000 où le Père Noël a rasé sa barbe, en un an elle pousse de 365 mm et est raccourcie de 150 mm. Elle mesure donc 215 mm de plus à chaque Noël, sauf en 2004 qui est une année bissextile où elle prend 216 mm. Au Noël 2006, elle mesure donc 5 x 215 + 216 = 1291. Elle touche le sol 5 jours avant Noël 2007. Elle a donc poussé de 360 mm. Elle mesure donc 1291 + 360 = 1651 mm. En ajoutant la hauteur de la tête du Père Noël, soit 150 mm, le Père Noël mesure donc, au cm près, 1,80 m.

4 Une variante du sudoku junior *(10 points)*



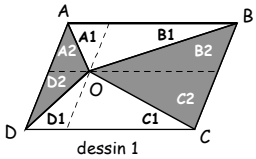
1°) La dame de cœur n'est ni sur la ligne, ni sur la colonne, ni dans le carré de 2x2 qui contiennent la dame de carreaux (X).

2°) La dame de cœur n'est ni sur la ligne, ni sur la colonne, ni dans le carré de 2x2 qui contiennent l'as de cœur (⊗).

3°) La dame de cœur est donc en A2.

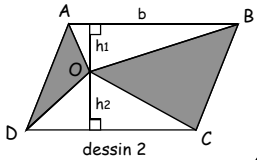
5 Le partage idéal *(10 points)*

1ère méthode : (dessin 1)
En traçant par le point O deux parallèles aux côtés du parallélogramme, on partage les quatre triangles AOB, BOC, COD et DOA en deux triangles désignés respectivement A1 et B1, A2 et B2, ... Les triangles A1 et A2, B1 et B2 ... ont respectivement la même aire. L'aire blanche est donc égale à l'aire grise quelle que soit la position du point O à l'intérieur du parallélogramme.



dessin 1

2ème méthode : (dessin 2)
L'aire des deux triangles blancs est : $\frac{b(h_1 + h_2)}{2}$.
Elle est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Donc l'aire grise est aussi égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Les deux aires, blanche et grise, sont donc toujours égales.



dessin 2

Rallye Mathématique Poitou - Charentes

20 février 2007

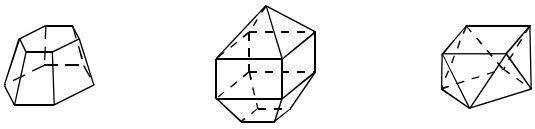
Éléments de solutions

3e

1 Alicia BOOLE-STOTT *(13 points)*

Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien Georges Boole surtout connu comme étant le concepteur de la logique symbolique (algèbre booléenne), logique transcrite en équations algébriques.
Elle est la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.
Elle s'est illustrée par ses travaux sur les polytopes (polyèdres de dimensions 4).

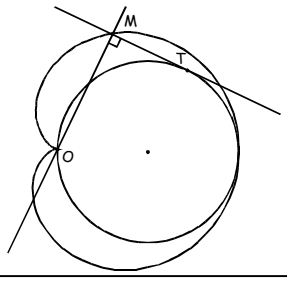
Formule d'Euler : F + S = A + 2.



(A) 8 + 12 = 18 + 2 (B) 13 + 13 = 24 + 2 (C) 10 + 8 = 16 + 2

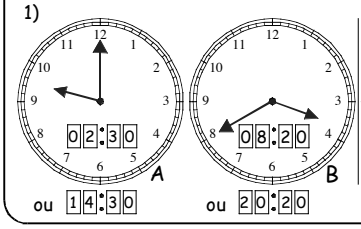
2 Une construction *(15 points)*

On obtient une cardioïde.



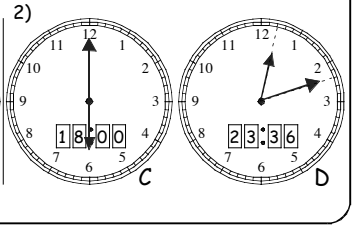
3 Tout à l'heure *(15 points)*

1)



ou 14:30 ou 20:20

2)



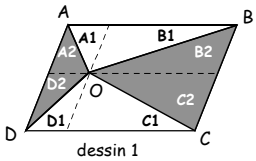
4 Tonton Cristobal *(10 points)*

Tonton Cristobal qui n'est plus très jeune a 3 neveux qui ont un an d'écart (par exemple 18, 19 et 20 ans). Il a également 5 petits enfants qui ont également un an d'écart et 7 petits neveux qui ont aussi un an d'écart. Quand Tonton Cristobal ajoute les âges de ses neveux il trouve son âge. De même, s'il ajoute les âges de ses petits enfants il trouve encore son âge et également s'il ajoute les âges de ses petits neveux. Mais au fait, quel est l'âge de Tonton Cristobal ?

En notant (n - 1), n et (n + 1) les âges de ses neveux, (p - 2), (p - 1), p, (p + 1) et (p + 2) les âges de ses 5 petits-enfants et (q - 3), (q - 2), (q - 1), q, (q + 1), (q + 2) et (q + 3) les âges de ses 7 petits-neveux, on remarque que l'âge de Tonton Cristobal est 3n = 5p = 7q. L'âge de Tonton Cristobal est donc un multiple de 3 x 5 x 7 = 105. Vu le contexte, Tonton Cristobal a 105 ans.

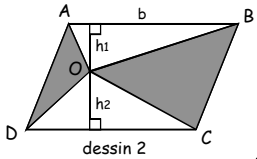
5 Le partage idéal *(10 points)*

1ère méthode : (dessin 1)
En traçant par le point O deux parallèles aux côtés du parallélogramme, on partage les quatre triangles AOB, BOC, COD et DOA en deux triangles désignés respectivement A1 et B1, A2 et B2, ... Les triangles A1 et A2, B1 et B2 ... ont respectivement la même aire. L'aire blanche est donc égale à l'aire grise quelle que soit la position du point O à l'intérieur du parallélogramme.



dessin 1

2ème méthode : (dessin 2)
L'aire des deux triangles blancs est : $\frac{b(h_1 + h_2)}{2}$.
Elle est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Donc l'aire grise est aussi égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Les deux aires, blanche et grise, sont donc toujours égales.



dessin 2

Rallye Mathématique Poitou - Charentes

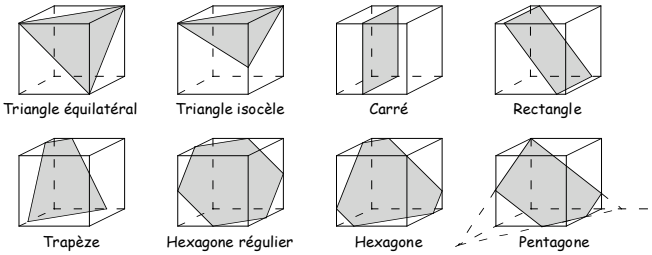
20 février 2007

Éléments de solutions

2e

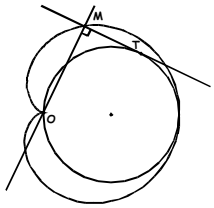
1 Alicia BOOLE-STOTT *(14 points)*

Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien Georges Boole surtout connu comme étant le concepteur de la logique symbolique (algèbre booléenne), logique transcrite en équations algébriques.
Elle est la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.
Elle s'est illustrée par ses travaux sur les polytopes (polyèdres de dimensions 4).

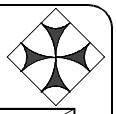


2 Une construction *(15 points)*

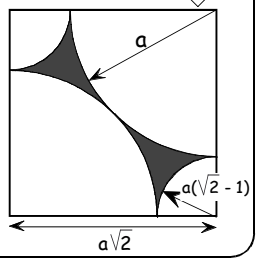
On obtient une cardioïde.



3 Une nouvelle croix de Malte *(10 points)*



En choisissant a comme demi-diagonale du grand carré, l'aire de ce grand carré est $2a^2$. L'aire de deux branches de la croix est donc égale à l'aire du grand carré moins les deux quarts de disques de rayons a et moins les deux quarts de disques de rayon $a(\sqrt{2} - 1)$, soit $2a^2 - \pi a^2/2 - \pi a^2(\sqrt{2} - 1)^2/2$.
L'aire des quatre branches de la croix est donc le double : $4a^2 - \pi a^2 - \pi a^2(\sqrt{2} - 1)^2$. Après simplification d'écriture, il vient : $2a^2[2 + (\sqrt{2} - 2)\pi]$. Le rapport de la croix au carré est donc $2 + (\sqrt{2} - 2)\pi$, soit 0,16 par excès, ce qui est inférieur à 0,20.
Le grand maître a donc raison.



4 Le muguet *(10 points)*

Un champ carré est divisé en 9 petits carrés. Chacun de ces petits champs contient 19 brins de muguet, et il y a au total dans le grand champ 2011 clochettes.
Les brins de muguet peuvent avoir 11, 12 ou 13 clochettes, mais il y a plus de muguets à 12 clochettes que de muguets à 13 clochettes.
Combien y a-t-il de brins de muguet à 13 clochettes au maximum ?

Il y a 9 x 19 = 171 brins de muguet. Si x, y et z désignent respectivement les nombres de brins à 11, 12 et 13 clochettes, on obtient le système suivant que l'on résout en y et en z :

$$\begin{cases} x + y + z = 171 \\ 11x + 12y + 13z = 2011 \\ z < y \end{cases}$$

Éliminer x conduit à $y + 2z = 130$.
Puisque $z < y$, on a $3z < y + 2z < 3y$, soit $3z < 130 < 3y$, ce qui conduit à $z \leq 43$ et $y \geq 44$. Il y a donc au maximum 43 brins de muguet à 13 clochettes. Si c'est le cas, il y a alors 44 brins de muguet à 12 clochettes et 84 brins de muguet à 11 clochettes.

5 À la recherche des promotions équivalentes *(15 points)*

Établissons les rapports : (prix/quantité), noté P/Q.
Si x = 10 % et y = 10 %, les rapports sont 0,9P/Q pour Miniprix et P/1,1Q pour Maxiprodplus. Or 9/10 < 10/11 ; Miniprix est donc plus avantageux.
Si x = 20 % et y = 25 %, on a 0,8P/Q pour Miniprix et P/1,25Q pour Maxiprodplus.
Les rapports sont égaux, les deux magasins sont aussi avantageux l'un que l'autre.
De façon générale, pour que les promotions soient équivalentes, il faut :

$\frac{(100 - x)P}{100Q} = \frac{P}{(1 + y/100)Q}$. Il faut donc que : $\frac{(100 - x)}{100} = \frac{100}{100 + y}$, ou encore que $(100 - x)(100 + y) = 10\,000$.

Olympiades académiques de mathématiques : bilan 2007

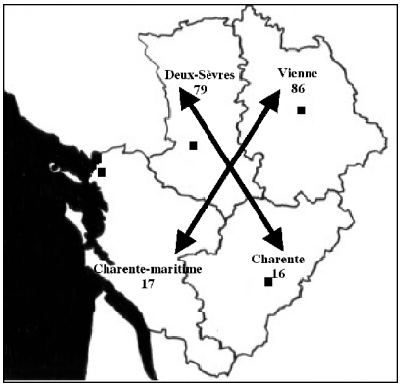
Le 6 juin dernier au rectorat de Poitiers avait lieu la remise des prix des Olympiades.
Le recteur Frédéric Cadet, évoquant l'angoisse de beaucoup d'élèves français vis-à-vis des mathématiques, a souligné l'intérêt des Olympiades, qui se situent hors de tout enjeu scolaire.
Il a rappelé qu'elles s'adressent désormais à tous les élèves de Première. Certes, avec 36 participants, la filière S domine largement, mais il y avait aussi 6 élèves de ES, 1 élève de STG et 1 élève de STI.

L'équipe régionale (Frédéric De Ligt, Marc Le Métayer, Jacques Marot, Dominique Souder, Hassan Tarfaoui*) avait préparé les deux exercices régionaux, et a évalué les travaux des participants.
Les sujets (deux exercices nationaux, deux exercices régionaux) sont disponibles sur le site académique www.ac-poitiers.fr : dans la rubrique "Disciplines et filières" choisir "Mathématiques collèges-LGT", puis "Pour les élèves".
François La Fontaine, IPR de mathématiques, a présenté l'exercice ci-dessous, conçu par Frédéric de Ligt, que nous soumettons à la sagacité des lecteurs de Corol'aire.

** qui passe le relais l'année prochaine à Jean-Michel Sarlat.*

Une somme déterminante ?

Les numéros des quatre départements de la région Poitou-Charentes sont liés ensemble par une relation qui peut sembler étonnante.
Observez plutôt : 16 + 17 + 79 + 86 = 86 x 17 – 79 x 16.
La relation : $a + b + c + d = db - ca$ avec $a < b < c < d$ (1) entre les numéros de quatre départements est-elle exceptionnelle ?
Pour les besoins de l'exercice, vous conviendrez de la numérotation fantaisiste suivante : 20 (Corse du Sud) ; 96 (Haute Corse) ; 97 (Guadeloupe) ; 98 (Martinique) ; 99 (Guyane) ; 100 (Réunion). Ainsi vous disposerez des 100 départements français numérotés de 1 à 100.
a) Donner quatre autres numéros de département vérifiant la relation (1) et produisant de plus exactement le même résultat que la région Poitou-Charentes à savoir 198.
b) La relation (1) peut-elle produire un résultat impair ?
c) Au total, combien peut-on former de groupes de quatre départements vérifiant la relation (1) ?



Enfin les lauréats ont reçu leurs prix :
- 1ère S : Benoît LOISEL (C. Guérin Poitiers), Valentin QUINT (C. Guérin Poitiers), Nicolas ROLLAND (C. Guérin Poitiers), Mih-Tâm VO (C. Guérin Poitiers), Marlène JAULIN (Bois d'Amour Poitiers), Christophe ALLARD (E. Vinet Barbezieux), Julien JEAN (Saint-André Niort).
- 1ère ES : Benoît GEAIRAIN (M. Genevoix Bressuire).

Bravo à eux (et à leurs professeurs) !

Louis-Marie BONNEVAL

RU - BRI - COL AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Jean-Christophe Laugier (Rochefort) nous présente une démonstration issue de la théorie des graphes qui l'a particulièrement impressionné :

Il arrive que l'on ressente un profond sentiment esthétique devant une démonstration mathématique ingénieuse. J'en veux pour preuve une démonstration d'un fascinant énoncé dû à Ramsey que l'on peut énoncer sous la forme : *P étant une population infinie d'individus, il est toujours possible d'extraire de P une infinité d'individus qui se connaissent mutuellement ou sont tous mutuellement étrangers.*

Pour l'anecdote, Paul Erdös a posé ce problème à Louis Posa, alors âgé de 13 ans. Celui-ci mit 15 minutes à saisir l'énoncé. Rentré chez lui, il y réfléchit toute la soirée et, avant d'aller se coucher, il en avait trouvé une démonstration. Je tiens ces renseignements de l'admirable livre de Ross Honsberger « Joyaux Mathématiques ». Ross Honsberger livre l'idée de la démonstration du théorème de Ramsey, que j'ai rédigée et que je joins. Je ne résiste pas à l'envie de faire partager aux lecteurs de COROL'AIRE le plaisir que j'ai ressenti.

Démonstration du théorème de Ramsey :

La démonstration du théorème de Ramsey repose sur la construction d'un sous-ensemble $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ infini dénombrable de P possédant la propriété remarquable suivante : *pour tout $i \geq 1$, x_i connaît tous les x_j tels que $j > i$ <u>ou</u> x_i ne connaît aucun des x_j tels que $j > i$.*

X étant construit, les deux sous-ensembles Y et Z :

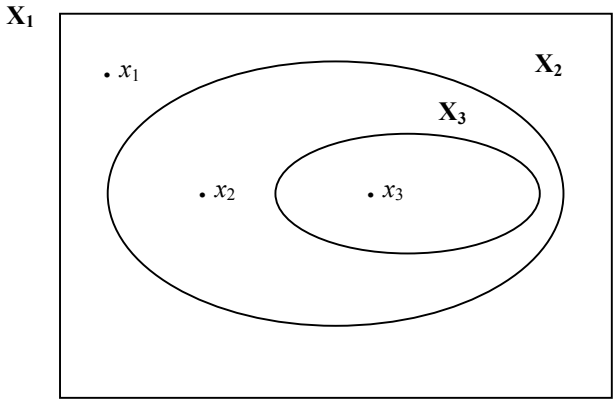
$Y = \{x_i \in X \,/\, x_i$ connaît x_j pour tout $j > i\}$, $Z = \{x_i \in X \,/\, x_i$ ne connaît pas x_j pour tout $j > i\}$ constituent donc une partition de X.

Puisque X est infini, l'un des deux sous-ensembles Y et Z est infini et fournit l'ensemble infini cherché de personnes se connaissant mutuellement ou mutuellement étrangères. Il s'agit à présent de construire l'ensemble X. Introduisons tout d'abord les définitions suivantes :

Si A est une partie de P et si $a \in P - A$, on dit que a connaît (resp. est étranger à) A si a connaît (resp. est étranger à) tout individu de A.

La construction de X, comme on va le voir, repose sur l'application répétée du lemme suivant facile à établir : *Si A est une partie infinie de P et si $a \in A$, il existe une partie infinie A' de $A - \{a\}$ telle que a connaît A' ou est étranger à A'.*

Par application du lemme, on construit aisément par récurrence une suite (x_n) d'éléments de P et une suite (X_n) de parties infinies de P vérifiant : $X_1 = P$; pour tout $n \geq 1$, $x_n \in X_n$, $X_{n+1} \subset X_n - \{x_n\}$, x_n connaît X_{n+1} ou est étranger à X_{n+1}. Il résulte de la construction précédente que $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} \subset X_{n+1}$ et par suite x_n connaît $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ ou est étranger à $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$. On a bien obtenu l'ensemble $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ cherché.



Quant à **Marc Blanchard** (Rochefort), il nous propose une curiosité géométrique :

Dans un plan, soit G le barycentre de 3 points massifs donnés (A, a), (B, b), (C, c) non alignés tels que $a + b + c = 1$ et $abc \neq 0$.

Considérons A', B', C' tels que : $\overrightarrow{B'C'} = a\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{C'A'} = b\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{A'B'} = c\overrightarrow{GC}$ (c'est licite car $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$).

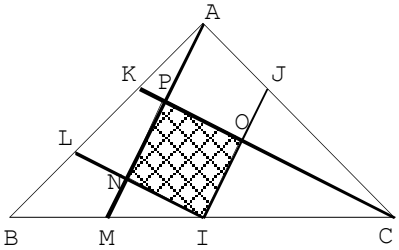
Nommons G' le barycentre de (A', a), (B', b), (C', c). Alors : $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$,

donc $\overrightarrow{A'G'} = b\overrightarrow{A'B'} + c\overrightarrow{A'C'} = bc(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}) = bc\overrightarrow{BC}$. De même $\overrightarrow{B'G'} = ca\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{C'G'} = ab\overrightarrow{AB}$. On en déduit les parallélismes : (A'G') // (BC), (B'G') // (CA), (C'G') // (AB) et une construction aisée de G'. En itérant le processus, on obtient un triangle A''B''C'' homothétique du triangle initial ABC dans le rapport –abc. Ce résultat ne se généralise pas à plus de 3 points et n'a pas de sens pour deux seuls points. On comprend donc qu'il ne soit guère connu car relève plus de la curiosité que de l'intérêt !

Des problèmes

69-1 *de Jean-Paul Guichard (Parthenay)* :
Partager un triangle équilatéral en cinq triangles isocèles.

69-2 *de Gilles Auriault (Oslo)* :
ABC est un triangle rectangle-isocèle en A. K et J sont au tiers des longueurs des côtés respectifs [AB] et [AC] à partir de A. L est le milieu de [KB], I est le milieu de [BC] et M est le milieu de [BI]. Démontrer que INPO est un carré (autre question qui présente moins d'intérêt : calculer l'aire de INPO en fonction de celle de ABC).

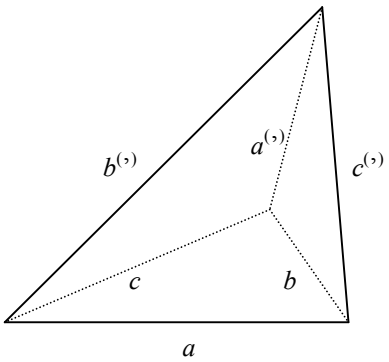


69-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Quelle(s) valeur(s) faut-il donner aux réels p et q pour que le graphe de la fonction f, définie sur [-1 ; 1] par $f(x)=x^2+px+q$, s'écarte le moins possible de l'axe des abscisses ?

Des solutions

65-1 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Ce fut comme un éclair. Si un tétraèdre est régulier, ses quatre faces ont la même aire. Evident ! Mais la réciproque ne serait-elle pas vraie elle aussi ? Tout en marchant vers le lycée, je me promets d'y réfléchir. C'est tout bête un tétraèdre, mais c'est quand même plus compliqué que cela n'y paraît. Et mon problème me semble bien plus compliqué que ce que je pensais.
Au lycée, je croise Jean-Christophe Laugier, un spécialiste de la rubrique. Bien évidemment, je lui soumets mon petit problème. Le lendemain, dans mon casier, je pouvais lire un contre exemple, signé Jean-Christophe.
Sauriez vous aussi mettre à plat cette conjecture ?
Deux jours après, Jean-Christophe m'avait photocopié un document fort intéressant sur le tétraèdre. Si on y trouvait des résultats assez difficiles à démontrer (du moins pour moi), il y avait également un "petit bijou", c'est-à-dire un résultat assez facile à obtenir et assez méconnu (en tout cas par moi !), qui peut être posé en classe de troisième ou de seconde. Sauriez vous démontrer qu'un tétraèdre a ses arêtes opposées de même longueur si et seulement si les quatre faces ont le même périmètre ? Que peut-on dire alors des quatre faces de ce tétraèdre ?

Solution de Frédéric de Ligt :
Il suffit de prendre des valeurs de a, b et c différentes avec le tétraèdre ci-contre pour mettre à plat la première conjecture. On part du même solide pour voir que le sens direct de la seconde affirmation est immédiatement prouvé.
Il reste à montrer que si les périmètres des quatre faces d'un tétraèdre sont égaux alors les arêtes opposées de celui-ci sont de même longueur. Chaque arête d'un tétraèdre participe à deux faces. Soit p le périmètre commun à ces quatre faces et a, b, c, a', b', c' les différentes longueurs des arêtes qui peuvent apparaître.
On a $a + b + c = a + b' + c' = a' + b' + c = a' + b + c' = p$; en additionnant on obtient $2a + 2b + 2c + 2a' + 2b' + 2c' = 4p$, d'où $a' + b' + c' = p$. Associé à l'égalité $a + b' + c' = p$, on aboutit à $a = a'$. On montre de même que $b = b'$ et $c = c'$. Les quatre faces triangulaires sont nécessairement isométriques.



66-2 *(de Jean-Christophe Laugier)* :
n joueurs ($n \geq 2$) se sont affrontés deux à deux au cours d'un tournoi. Il n'y a pas eu de match nul. Montrer que l'on peut ranger les joueurs en une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n-1$, le joueur x_i a battu le joueur x_{i+1}.

Solution de l'auteur :
Notons $x \succ y$ la relation « *x a battu y* ». Démontrons l'énoncé par récurrence sur n. Il est évidemment vrai pour $n = 2$. Supposons-le établi jusqu'à l'ordre n ($n > 1$). Soit donc un tournoi de $n + 1$ joueurs numérotés 1, 2, …, $n + 1$. Considérons le joueur $n + 1$. S'il a battu tous les autres, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut ranger les joueurs 1, 2,…, n en une suite x_1, $x_2,\ldots, x_n$ telle que $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n$; on a alors $n+1 \succ x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n$. De même, s'il a été battu par tous les autres, on a

$x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_n \succ n+1$. Si enfin le joueur $n + 1$ a été battu par k joueurs et en a battu $n - k$ autres $(1 \le k \le n-1)$, on peut ranger d'après l'hypothèse de récurrence les k joueurs ayant battu $n + 1$ en une suite $x_1, x_2,\ldots, x_k$ telle que $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k$ et les n-k autres en une suite $x_{k+1}, x_{k+2},\ldots, x_n$. telle que $x_{k+1} \succ x_{k+2} \succ ... \succ x_n$;

on a alors $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k \succ n+1 \succ x_{k+1} \succ x_{k+2} \succ ... \succ x_n$ et ceci achève la démonstration.

Autre solution de Frédéric de Ligt :

Pour $n = 2$ la propriété est claire. Prenons alors $n > 2$. On raisonne par l'absurde. Supposons que l'on puisse établir un classement $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k$ d'au maximum k joueurs, avec $2 \le k < n$. Il y a donc au moins un joueur distinct des k joueurs précédents. Notons-le a. On ne peut avoir $a \succ x_1$ car alors $a \succ x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k$, et on pourrait classer k +1 joueurs. On a donc $x_1 \succ a$. Mais on ne peut avoir $a \succ x_2$ car on aurait un classement de $k + 1$ joueurs : $x_1 \succ a \succ x_2 \succ ... \succ x_k$. Donc $x_1 \succ x_2 \succ a$ et on continue le même raisonnement avec x_3 et ainsi de suite. Finalement on obtient nécessairement $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k \succ a$ qui est aussi un classement de $k + 1$ joueurs. Contradiction.

A noter que cette propriété a été établie par le mathématicien hongrois Laszlo Rédei en 1934.

67-2 *(de Frédéric de Ligt)* :

On a l'identité $(n + 2)n + 1 = (n + 1)^2$; cela suggère l'idée de s'intéresser aux suites (a_n) qui vérifient $a_{n+2}a_n + 1 = a_{n+1}^2$. En particulier, pourriez-vous montrer qu'à partir de $a_1 = 1$ et de $a_2 = m$ avec m entier supérieur à 1, la suite (a_n) ne produit que des entiers naturels ?

Solution de l'auteur :

On suppose que m est un entier plus grand que 1. On considère la suite $(v_n)_{n\ge0}$ définie par $v_{n+2} = mv_{n+1} - v_n$ avec $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. On observe que $v_2 = m$. Il va s'agir de prouver que les suites $(v_n)_{n\ge1}$ et $(a_n)_{n\ge1}$ coïncident. On s'intéresse pour cela à la matrice $Q_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} & -v_{n+1} \\ v_{n+1} & -v_n \end{pmatrix}$, qui se particularise en $Q_0 = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec det $(Q_0) = 1$. Un raisonnement par récurrence permet de montrer que $Q_n = Q_0^{n+1}$:

La relation est vraie au rang 0. Soit n un entier positif, supposons que $Q_n = Q_0^{n+1}$.

On a alors $Q_0^{n+2} = Q_0^{n+1}Q_0 = Q_nQ_0 = \begin{pmatrix} v_{n+2} & -v_{n+1} \\ v_{n+1} & -v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv_{n+2} - v_{n+1} & -v_{n+2} \\ mv_{n+1} - v_n & -v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{n+3} & -v_{n+2} \\ v_{n+2} & -v_{n+1} \end{pmatrix} = Q_{n+1}$.

En utilisant la propriété des déterminants : det (AB) = det (A) det (B), on a donc det (Q_n) = det (Q_0^{n+1}) = det $(Q_0)^{n+1} = 1$.

Par conséquent det $(Q_n) = -v_{n+2}v_n + v_{n+1}^2 = 1$. Les suites $(v_n)_{n\ge1}$ et $(a_n)_{n\ge1}$ sont donc égales terme à terme. Par ailleurs, il est clair, en observant la relation de récurrence entre les termes de la suite $(v_n)_{n\ge0}$ et ses deux premiers termes, que tous les termes de cette suite sont des entiers. On peut même assurer que ce sont des entiers naturels. Pour cela prouvons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} > v_n \ge 0$. Quand $n = 0$, on a bien $v_2 > v_1 \ge 0$. Soit n un entier naturel, supposons que $v_{n+1} > v_n \ge 0$, on a alors $v_{n+2} - v_{n+1} = (m-1)v_{n+1} - v_n \ge v_{n+1} - v_n > 0$. La suite $(a_n)_{n\ge1}$ est donc bien constituée d'entiers naturels dès que m est un entier supérieur à 1.

Pour $m = 2$, cette suite fournit les entiers naturels non nuls.

Pour m =3, elle fait apparaître les termes de rang pair de la suite de Fibonacci définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ avec $F_1 = F_2 = 1$, c'est-à-dire que $a_n = F_{2n}$ pour tout entier naturel n non nul. En effet, on a tout d'abord $a_1 = F_2 = 1$, $a_2 = F_4 = 3$ et, en partant de $F_{2n+4} = F_{2n+3} + F_{2n+2}$; $F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$; $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$, on tire $F_{2n+4} - F_{2n+2} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$ puis $F_{2n+4} - 2F_{2n+2} = F_{2n+2} - F_{2n}$ et enfin $F_{2n+4} = 3\,F_{2n+2} - F_{2n}$.

68-2 *(de Louis Rivoallan)* :

Voici un petit exercice de niveau Troisième, Seconde. ABCD est un trapèze rectangle en A et D. On veut tracer le point G sur (AD) tel que BG = GC. Bien sûr, vous avez tout de suite pensé à prendre l'intersection de la médiatrice de [BC] avec la droite (AD). Mais voici ce qu'a imaginé un élève. Il trace B' et C' symétriques de B et C par rapport à (AD), puis il trace les médiatrices de [B'C] et de [BC']. Elles se coupent en G affirme-t-il. A-t-il raison ?

Solution de Frédéric de Ligt :

On note O l'intersection de (AD) avec la médiatrice de [B'C]. On a donc OB' = OC. Par conservation de la distance par symétrie on a aussi OB = OB', d'où OB = OC et donc G = O. De même, si on note O' l'intersection de (AD) avec la médiatrice de [BC'], on a O'B = O'C = O'C', d'où O'B = O'C et on a aussi O' = G. L'affirmation de l'élève est donc légitime.