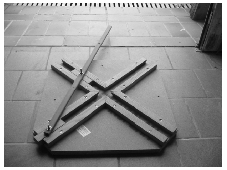
Rallye Mathématique Poitou - Charentes

3^e

Épreuve du 21 février 2012
Éléments de solutions

1 Des outils pour tracer (20 points)



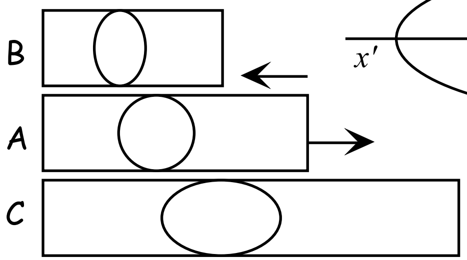
Un instrument à découvrir (4 points)

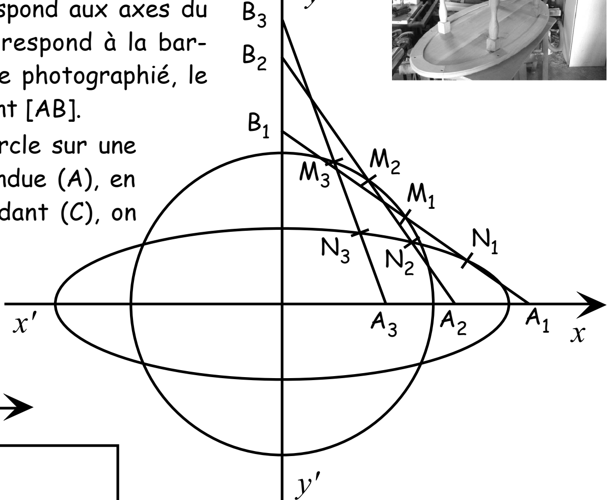
Cet appareil est un ellipsographe.
Il permet de tracer des formes ovales appelées ellipse pour réaliser, par exemple des tables, comme le montrent les photos.

Lors de l'épreuve d'entraînement, vous avez fait glisser une barrette [AB] le long de deux axes perpendiculaires. Vous avez pu observer, et même démontrer, que le milieu M de [AB] décrivait un cercle. Si on avait choisi un point N de [AB] autre que son milieu, ce point N aurait décrit une ellipse (dessin ci-dessous).

C'est justement le principe de l'ellipsographe : la partie fixe de l'appareil correspond aux axes du dessin et la partie mobile correspond à la barrette [AB]. Pour l'ellipsographe photographié, le point N est extérieur au segment [AB].

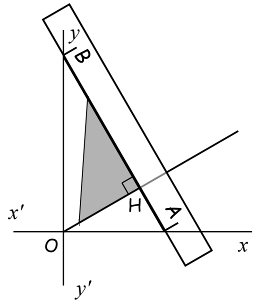
Remarque : en dessinant un cercle sur une bande élastique légèrement tendue (A), en la rétractant (B) ou en la tendant (C), on obtient une ellipse.

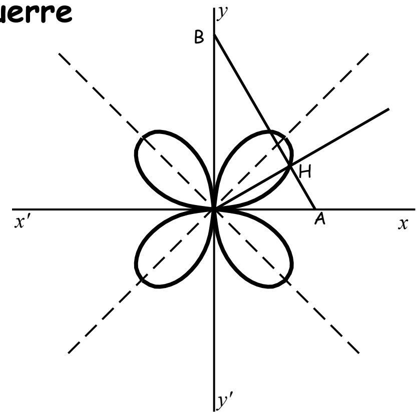




Avec une équerre

Une courbe très originale (8 points)

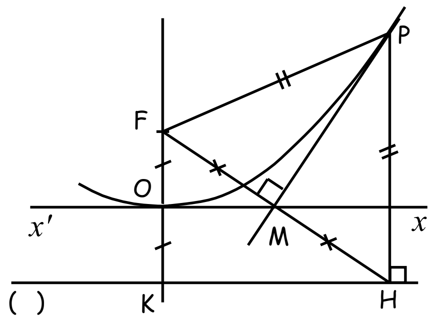




Dans l'épreuve d'entraînement, le milieu M de la barrette se déplaçait sur un cercle (propriété de la médiane relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle).
Ici, H est le pied de la hauteur issue de O sur [AB].

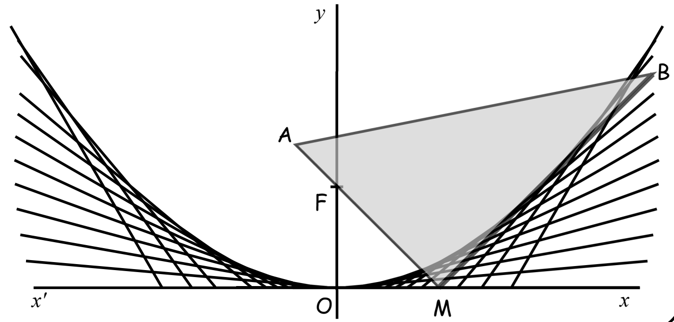
On obtient une rosace à quatre branches ayant quatre axes de symétrie : les deux axes $(x'x)$ et $(y'y)$ ainsi que les deux bissectrice en pointillés sur le dessin. OH est maximum lorsque [AB] est perpendiculaire à la première bissectrice. H est alors le milieu de [AB] et se trouve sur la bissectrice.

Fils et pointes n° 2 (8 points)



Dans l'épreuve d'entraînement, un segment [AB], de longueur variable, enveloppait un arc de parabole (propriété d'une parabole qui ne sera pas démontrée ici !).
Ici, le côté [MB] de l'équerre enveloppe aussi une parabole. En effet, tout point P d'une parabole est à égale distance du foyer F et de la directrice ( ) de la parabole : PF = PH.
( ) est parallèle à $(x'x)$ et O est le milieu de [FK]. Soit M le milieu de [FH]. (PM) est perpendiculaire à (FH) et on démontre que (PM) est tangente à la parabole en P.

Ainsi, lorsque M se déplace sur $(x'x)$, le triangle FMP est toujours rectangle en M. On retrouve l'équerre et son côté [MB] qui enveloppe donc une parabole.

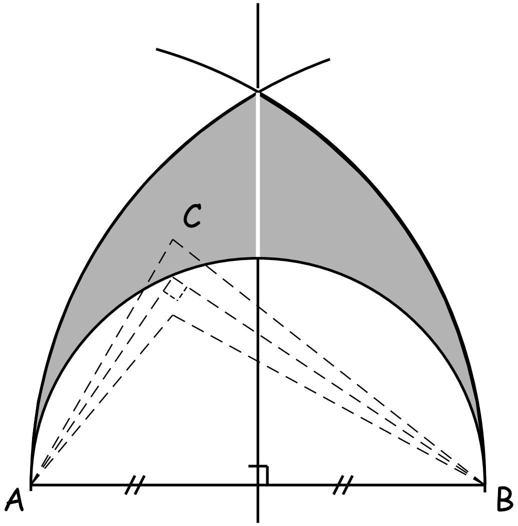


② Difficile de faire simple (12 points)

1°) [AB] est le plus grand côté du triangle ABC. Le point C est donc à l'intérieur des deux arcs de centre A et B et de rayon AB.

2°) Tous les angles doivent être aigus et le triangle n'est pas rectangle. Le point C doit donc être à l'extérieur du demi-disque de diamètre [AB].

3°) Le triangle ABC n'est pas isocèle. Le point C ne peut donc pas être sur la médiatrice de [AB]. Conclusion : le point C doit être à l'intérieur de la zone grisée, la frontière de cette zone exclue.



③ Mot chiffré (10 points)

Si a désigne la valeur de la première lettre, nous avons dans les cases ci-contre les valeurs des autres lettres en fonction de a, sauf pour la troisième lettre qui est désignée par b.

a	2a	b	3a/2	3a

La deuxième lettre qui est égale au triple d'un carré d'un entier est donc paire. Sa valeur étant inférieure à 26, elle est obligatoirement égale 12.

On en déduit que a = 6, que la valeur de la quatrième lettre est 9 et celle de la cinquième est 18. La somme des cinq valeurs des lettres étant 46, la valeur de la troisième lettre est 1.

6	12	1	9	18

F	L	A	I	R

④ 2012 (8 points)

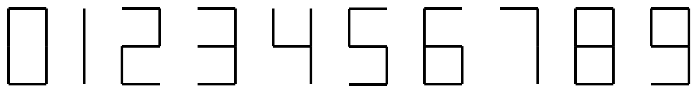
Les puissances successives de 2012 se terminent comme celles de 2 :
$2^1 = \mathbf{2}$, $2^2 = \mathbf{4}$, $2^3 = \mathbf{8}$, $2^4 = 1\mathbf{6}$, $2^5 = 3\mathbf{2}$, $2^6 = 6\mathbf{4}$, $2^7 = 12\mathbf{8}$...
Les chiffres des unités des puissances successives de 2012 se retrouvent selon la périodicité 2, 4, 8, 6, $\underbrace{2, 4, 8, 6}$... : une période de quatre chiffres.

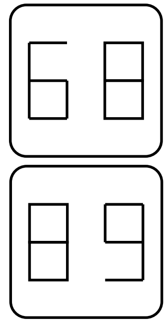
Or l'exposant 2012 est divisible par 4. Le chiffre des unités de 2012^{2012} sera le quatrième chiffre de la période, soit 6.

⑤ Déchiffrez l'envers et l'endroit (10 points)

Voici le texte en français du problème posé en allemand, en anglais et en espagnol :

Une boîte contient des cartes permettant de montrer les nombres 00 , 01, ... , 99, les chiffres étant écrits comme ci-dessous.





Sachant que les chiffres 0, 1, 2, 5, 6, 8 et 9 retournés deviennent 0, 1, 2, 5, 9, 8 et 6, et donc, par exemple, que la plaquette 68 permet de montrer aussi le nombre 89, (dessin ci-contre) combien de cartes au minimum contient la boîte pour pouvoir montrer tous les nombres de 00 à 99 ?

Considérons tous les nombres à deux chiffres que l'on peut écrire avec 0, 1, 2, 5, 6, 8 et 9.
Les cartes 00, 11, 22, 55, 88, 69, 96 restent elles-mêmes dans le retournement.
On ne les prendra plus en compte.
01, 02, 05, 06, 08 et 09 deviennent 10, 20, 50, 60, 80 et 90 qui sont donc inutiles.
12, 15, 16, 18 et 19 deviennent 21, 51, 91, 81 et 61 qui sont aussi inutiles.
20 et 21 ont déjà été obtenus. 25, 26, 28 et 29 deviennent 52, 92, 82 et 62.
50, 51 et 52 ont déjà été obtenus. 56, 58 et 59 deviennent 95, 85 et 65.
60, 61, 62 et 65 ont déjà été obtenus. 66 et 68 deviennent 99 et 89.
80, 81, 82, 85 et 89 ont déjà été obtenus. 86 devient 98.
90, 91, 92, 95, 98 et 99 ont déjà été obtenus.
Il y a donc 21 cartes inutiles, et la boîte contiendra au minimum 79 cartes.