Rallye Mathématique Poitou - Charentes

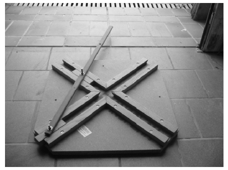
4^{e}

Épreuve du 21 février 2012

Éléments de solutions

(1) Des outils pour tracer (20 points)

Un instrument à découvrir (4 points)



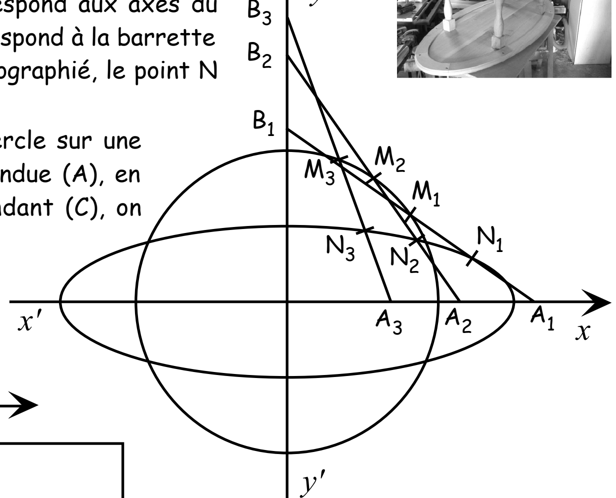
Cet appareil est un ellipsographe.

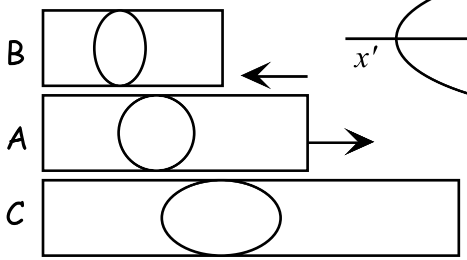
Il permet de tracer des formes ovales appelées ellipse pour réaliser, par exemple des tables, comme le montrent les photos.

Lors de l'épreuve d'entraînement, vous avez fait glisser une barrette [AB] le long de deux axes perpendiculaires. Vous avez pu observer, et même démontrer, que le milieu M de [AB] décrivait un cercle. Si on avait choisi un point N de [AB] autre que son milieu, ce point N aurait décrit une ellipse (dessin ci-dessous).

C'est justement le principe de l'ellipsographe : la partie fixe de l'appareil correspond aux axes du dessin et la partie mobile correspond à la barrette [AB]. Pour l'ellipsographe photographié, le point N est extérieur au segment [AB].

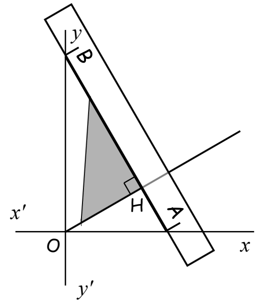
Remarque : en dessinant un cercle sur une bande élastique légèrement tendue (A), en la rétractant (B) ou en la tendant (C), on obtient une ellipse.

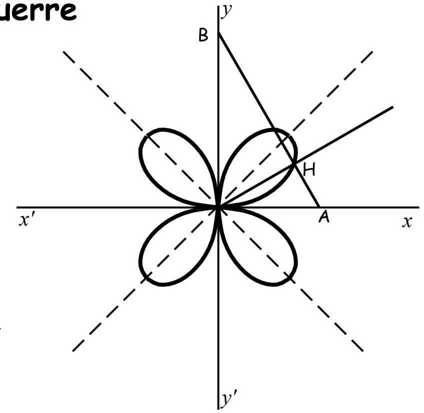




Avec une équerre

Une courbe très originale (8 points)



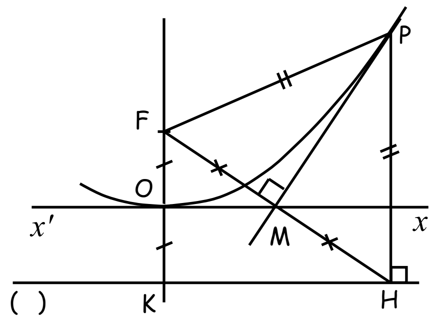


Dans l'épreuve d'entraînement, le milieu M de la barrette se déplaçait sur un cercle (propriété de la médiane relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle).

Ici, H est le pied de la hauteur issue de O sur [AB].

On obtient une rosace à quatre branches ayant quatre axes de symétrie : les deux axes $(x'x)$ et $(y'y)$ ainsi que les deux bissectrice en pointillés sur le dessin. OH est maximum lorsque [AB] est perpendiculaire à la première bissectrice. H est alors le milieu de [AB] et se trouve sur la bissectrice.

Fils et pointes n° 2 (8 points)

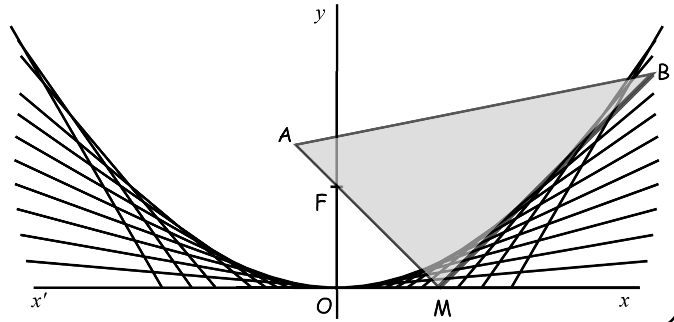


Dans l'épreuve d'entraînement, un segment [AB], de longueur variable, enveloppait un arc de parabole (propriété d'une parabole qui ne sera pas démontrée ici !).

Ici, le côté [MB] de l'équerre enveloppe aussi une parabole. En effet, tout point P d'une parabole est à égale distance du foyer F et de la directrice ( ) de la parabole : PF = PH.

( ) est parallèle à $(x'x)$ et O est le milieu de [FK]. Soit M le milieu de [FH]. (PM) est perpendiculaire à (FH) et on démontre que (PM) est tangente à la parabole en P.

Ainsi, lorsque M se déplace sur $(x'x)$, le triangle FMP est toujours rectangle en M. On retrouve l'équerre et son côté [MB] qui enveloppe donc une parabole.



② Avec quatre nombres (15 points)

Solutions possibles :

0 = (4 – 1- 3) x 6	10 = 4 x (3 + 1) – 6	20 = 6 x 4 – 3 – 1	30 = (6 + 4) x 3 x 1
1 = (3 x 4) : 6 – 1	11 = 3 x (6 – 1) – 4	21 = 6 x 4 – 3 x 1	31 = 4 x (6 + 1) + 3
2 = (3 x 4) : (6 : 1)	12 = 6 + 4 + 3 – 1	22 = 6 x 4 – 3 + 1	32 = 4 x (6 + 3 – 1)
3 = (3 x 4) : 6 + 1	13 = 6 + 4 + 3 x 1	23 = 6 x 3 + 4 + 1	33 = 3 x (6 + 4 + 1)
4 = 6 – 4 : (3 – 1)	14 = 6 + 4 + 3 + 1	24 = 6 : (1 – 3 : 4)	34 = ?
5 = 6 – 4 : (3 + 1)	15 = 6 x 3 – 4 + 1	25 = (6 + 1) x 4 – 3	
6 = 6 x 4 : (3 + 1)	16 = (6 – 3 + 1) x 4	26 = 6 x 4 + 3 – 1	
7 = 6 + 4 – (3 x 1)	17 = (6 + 1) x 3 – 4	27 = 6 x 4 + 3 x 1	
8 = 6 + 4 - 3 + 1	18 = 4 x 3 + 6 x 1	28 = 6 x 4 + 3 + 1	
9 = 3 x (4 + 1) – 6	19 = 4 x 3 + 6 + 1	29 = (6 + 4) x 3 – 1	

③ Histoire de famille (8 points)

Voici le texte en français du problème posé en allemand, en anglais et en espagnol :

Retrouvez la répartition des 9 enfants d'André, Benoît et Charles sachant que :
- les filles sont deux fois moins nombreuses que les garçons,
- Charles a trois fois plus d'enfants qu'André,
- André a une fille de moins que Benoît,
- Benoît a des jumelles,
- l'un d'eux n'a pas de fille.

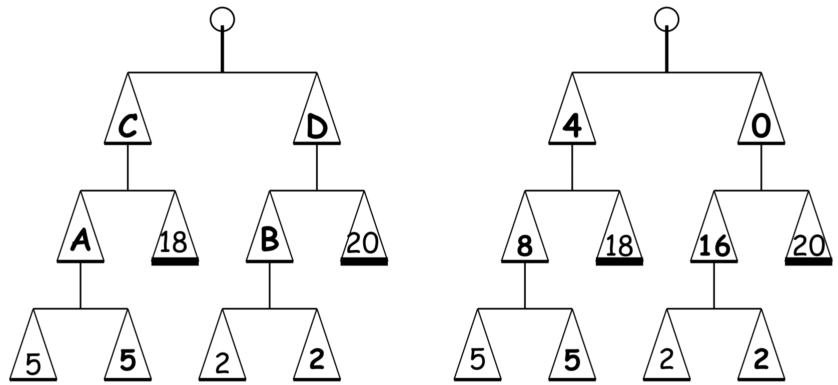
Il y a 9 enfants. Or il y a deux fois moins de filles que de garçons, il y a donc : 3 filles et 6 garçons.
Benoît a des jumelles donc il a 2 ou 3 filles.
Si Benoît a 3 filles, André qui en a une de moins que Benoît en aurait 2. Ce qui fait un total de 5 filles. Impossible. Donc Benoît a 2 filles, André 1 et c'est Charles qui n'en a pas.
Charles a 3 fois plus d'enfants qu'André donc Charles a 3 garçons. Il ne peut pas avoir 6 garçons car ça signifierait qu'André en a un, ce qui ferait un total de 7 : impossible.

En conclusion : Charles a 3 garçons, André a une fille et Benoît a 2 filles et 3 garçons.

	Filles	Garçons
André	1	0
Benoît	2	3
Charles	0	3

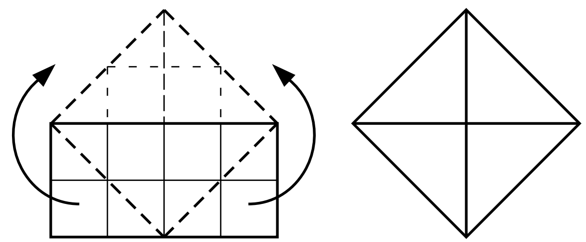
④ Moi, j'm'en balance ! (6 points)

Les deux plateaux du bas reçoivent obligatoirement l'un une masse de 5 et l'autre une masse de 2. Pour équilibrer au deuxième niveau, la masse A doit compléter à 18 les masses du premier niveau et B à 20. Donc A = 8 et B = 16.
Sous le plateau C, il y a un total de 36 et sous D un total de 40. Comme les masses doivent être les plus petites possible, C = 4 et D = 0. D'où la solution ci-dessous :



⑤ Découpages (11 points)

Rectangle (A) :



Rectangle (B) :