Rallye Mathématique Poitou - Charentes

2e

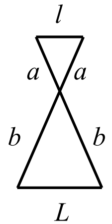
Épreuve du 21 février 2012
Éléments de solutions

1 Des outils pour tracer (36 points)

Un instrument à découvrir

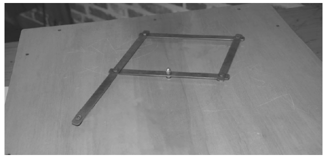
Cet instrument est un compas de proportion, ou compas de réduction, dont le principe est basé sur la propriété de Thalès. Il est utilisé en dessin.

$\frac{a}{b} = \frac{l}{L}$



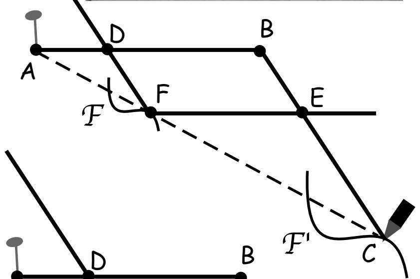
Avec des réglettes

Le pantographe

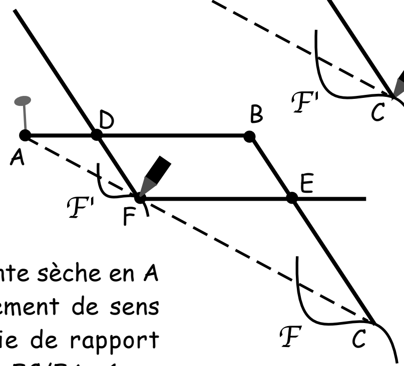


Le principe de cet instrument est basé aussi sur la propriété de Thalès : $\frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AD}$

Dans la configuration ci-contre, le dessin $\mathcal{F}'$ est un agrandissement de même sens du dessin $\mathcal{F}$. On a une homothétie de rapport positif et plus grand que 1 : AB/AD > 1.



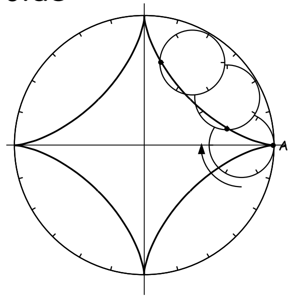
Dans cette deuxième configuration (crayon en F), le dessin $\mathcal{F}'$ est une réduction de même sens du dessin $\mathcal{F}$. On a une homothétie de rapport positif et plus petit que 1 : AD/AB < 1.



Si on avait fixé le pantographe en F avec la pointe sèche en A et le crayon en C, on aurait eu un agrandissement de sens inverse du dessin parcouru en A, homothétie de rapport négatif mais plus grand que 1 en valeur absolue : FC/FA > 1.

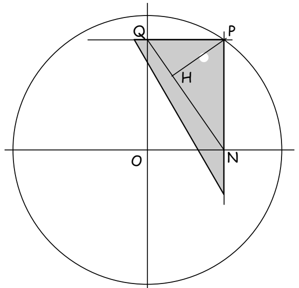
Avec une équerre : une astroïde

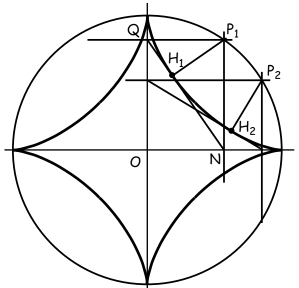
Dans l'épreuve d'entraînement, avec un disque parcourant l'intérieur d'un disque de rayon quadruple, vous avez tracé une astroïde, cas particulier d'une hypocycloïde à quatre points de rebroussement.



Ici, avec l'équerre coupant les axes en N et Q, le point H, pied de la hauteur issue de P dans le triangle rectangle NPQ, parcourt la même astroïde lorsque P se déplace sur le cercle.

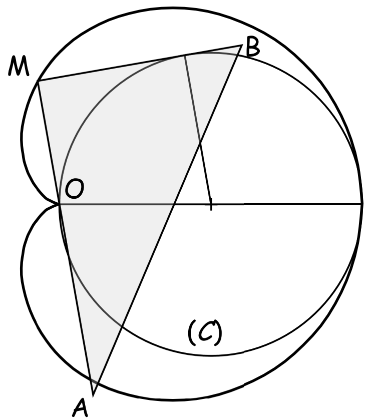
La courbe admet quatre axes de symétrie. On pouvait se contenter de choisir les différentes positions du point P sur le premier quart de cercle.



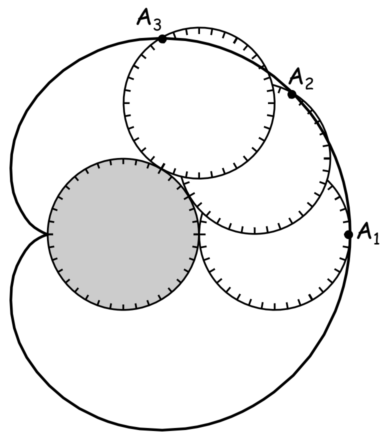


Avec des disques : une cardioïde

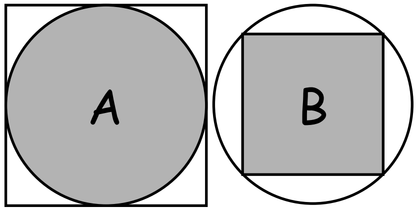
Dans l'épreuve d'entraînement, le point M, sommet de l'équerre, décrivait une cardioïde ; un côté de l'angle droit de l'équerre passait par O et l'autre côté de l'angle droit était tangent au cercle ($\mathcal{C}$).
Ici, le point A décrit aussi une cardioïde, cas particulier d'une épicycloïde à un point de rebroussement, les deux disques ayant le même rayon.



La cardioïde a un axe de symétrie. On peut s'en apercevoir rapidement en faisant tourner le cercle en sens inverse !



(2) Un problème à creuser ! (15 points)



On note R le rayon du cercle dans les deux situations.

A) Un pieu rond dans un trou carré :

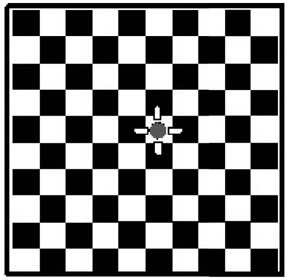
$$\frac{\text{Aire du disque}}{\text{Aire du carré}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$$

78,5% de l'aire de la section du trou est occupée.

B) Un pieu carré dans un trou rond (le carré inscrit a la même aire qu'un rectangle de longueur 2R et de largeur R) : $\frac{\text{Aire du carré}}{\text{Aire du disque}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$

63,7% de l'aire de la section du trou est occupée.
le remplissage est donc meilleur dans la situation A que dans la situation B.

(3) Retour à la case départ (15 points)



Il y a quatre déplacements et quatre directions possibles (nord (N), sud (S), est (E) ou ouest (O)) à chaque déplacement. Les possibilités se multipliant, il y a donc 4^4 soit 256 chemins possibles.
Parmi tous ces chemins on compte maintenant ceux qui se terminent à la case de départ.
Il y a ceux qui repassent par la case de départ dès le deuxième déplacement et qui sont au nombre de 16 :

NSNS, NSEO, NSOE, NSSN, SNNS, SNEO, SNOE, SNSN, EONS, EOEO, EOOE, EOSN, OENS, OEEO, OEOE, OESN (deux allers-retours).

Il y a ceux qui repassent pour la première fois par la case de départ au quatrième déplacement qui sont au nombre de 20 :

-NESO, NOSE, SENO, SONE, ENOS, ESON, ONES, OSEN (boucles).
- NOES, NNSS, NEOS, SOEN, SEON, SSNN, ONSE, OSNE, OOEE, ENSO, ESNO, EEOO (retour sur ses pas).

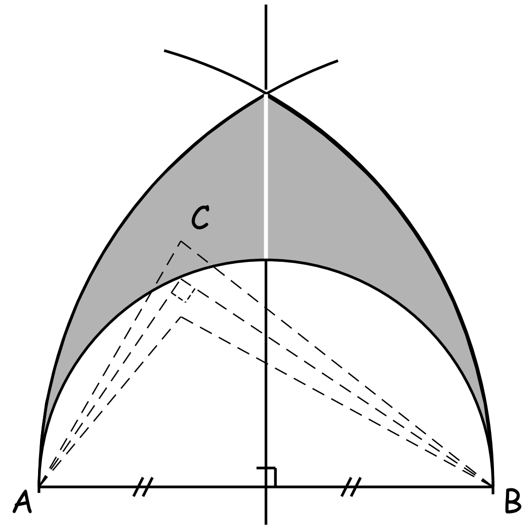
La probabilité que le pion retourne à la case de départ après quatre déplacements est de 36/256 = 9/64 soit environ 14%.

(4) Difficile de faire simple (10 points)

1°) [AB] est le plus grand côté du triangle ABC. Le point C est donc à l'intérieur des deux arcs de centre A et B et de rayon AB.

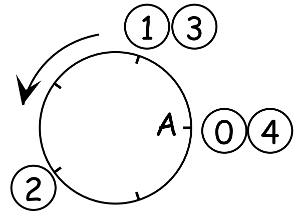
2°) Tous les angles doivent être aigus et le triangle n'est pas rectangle. Le point C doit donc être à l'extérieur du demi-disque de diamètre [AB].

3°) Le triangle ABC n'est pas isocèle. Le point C ne peut donc pas être sur la médiatrice de [AB].
Conclusion : le point C doit être à l'intérieur de la zone grisée, la frontière de cette zone exclue.

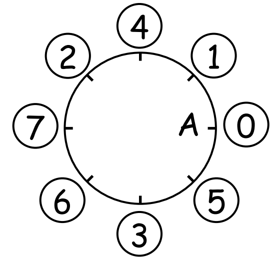


(5) J'ai les jetons ! (10 points)

On considère des cercles de périmètre n avec n jetons à placer selon la méthode indiquée.



Pour n = 5, les jetons 0, 1, 2, 3 et 4 se placent comme indiqué sur le dessin ci-contre : deux places vides et deux places occupées par deux jetons. On ne retrouve pas la situation du cercle de périmètre 4.
Les cas n = 6 et n = 7 donnent la même situation.
En revanche, pour n = 8, les huit jetons occupent les huit places (dessin ci-contre).
On observe donc que les n jetons occupent les n places pour n = 1, n = 2, n = 4 et n = 8.



Plus généralement, on peut démontrer (difficile) que pour $n = 2^p$ tous les points ont un et seul jeton et pour $n \neq 2^p$ des points n'ont pas de jetons et d'autres en ont plusieurs.

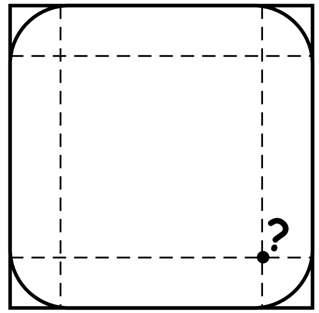
⑥ Les mots croisés du rallye (10 points)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	P	A	S	C	A	L	I	N	E		V
2	A	X	I	O	M	E		O		S	I
3	R	I		N	E	P	T	U	N	E	
4	F	A	U	S	T	I	N	E		G	A
5	A	L		T	H	E	O	R	E	M	E
6	I		T	R	Y		R	A	P	E	R
7	T		A	U	S	S	I		I	N	A
8	E	R	U	C	T	E	R	O	N	T	
9		O		T	E	L		B	E		A
10	T	I	P	I			P	E	S	O	S
11	O		C	O	M	P	A	S		U	T
12	T	E	R	N	A	I	R	E		F	I

⑦ Arrondissons les angles (10 points)

Voici le texte en français du problème posé en allemand, en anglais et en espagnol :

Avec le peu de peinture qu'il lui reste, Pablo ne peut recouvrir qu'une surface d'aire égale à 0,2 m². Or, la planche carrée qu'il souhaite peindre mesure 50 cm de côté. Il en arrondit donc les quatre coins en leur donnant la forme de quarts de cercle de même rayon. À quelle distance du bord doit-il centrer les quarts de cercle de façon à finir son pot de peinture ?



Notons r le rayon d'un quart de cercle. Les longueurs seront exprimées en cm et les aires en cm².
L'aire du carré initial est égale à : $50^2 = 2500$.
Chaque coin carré a une aire égale à r^2.
Les 4 quarts de disque de rayon r ont une aire totale de πr^2.
Ainsi, l'aire de la surface arrondie est égale à : $2500 - (4 - \pi) \times r^2$.

Pablo ne peut recouvrir qu'une surface d'aire 2000 cm². Il doit donc choisir r de sorte que : $2500 - (4 - \pi)r^2 = 2000$,

c'est-à-dire $r^2 = \dfrac{500}{4 - \pi}$.

On en conclut que : $r = \sqrt{\dfrac{500}{4 - \pi}} \approx 24{,}2$

(valeur approchée à 0,1 près par excès). Les centres des quarts de cercle doivent donc être situés à environ 24,2 cm du bord : la surface obtenue a alors pratiquement la forme d'un disque !